Herm. Kühne
Diss. Berlin
1892.

Beiträge zur Lehre von der n-fachen Mannigfaltigkeit.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

von der

Philosophischen Facultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

genehmigt und

nebst den beigefügten Thesen öffentlich zu verteidigen

am 15. September 1892

von

Hermann Kühne

aus Berlin.

BIBLIOTHEEK RIJKS UNIV. LEIDEN

Opponenten:

Herr R. Bonke, cand. math.
Herr M. v. Rohr, Dr. phil.
Herr A. Gutzmer.

Greifswald.

DRUCK VON F. W. KUNIKE.

—

1892.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535713_0061

Es ist in neuerer Zeit vielfach der Versuch gemacht worden, Lehrsätze der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern, und man ist hierbei zu Ergebnissen gekommen, die nicht nur für die Mannigfaltigkeitslehre selbst von Interesse sind, sondern sich auch darin als von Wichtigkeit erweisen, dass sie das Specielle erkennen lassen, welches der Ebene und dem Raum als 2- bzhw. 3-facher Mannigfaltigkeit anhaftet. Einen Versuch in eben dieser Richtung stellt die nachfolgende Arbeit dar. Sie giebt im wesentlichen eine Verallgemeinerung einiger aus der Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen bekannten Sätze, denen sich zum Schluss einige Betrachtungen über die conforme Abbildung in der n-fachen Mannigfaltigkeit anreihen.

Von den mir bekannten Arbeiten handelt eine Abhandlung des Herrn Schlegel: Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions. Bull. S. M. Fr. X über denselben Gegenstand, doch geschieht die dort an gegebene Verallgemeinerung in einer etwas anderen Richtung. Inbezug auf die Betrachtungen über conforme Abbildung bemerke ich, dass ich mich eng an die Untersuchungen Liouvilles, die er in einer Anmerkung zu Monge, Applications de l'analyse à la géométrie veröffentlicht hat, angelehnt habe. Dort befindet sich das von uns bewiesene Theorem für den Raum abgeleitet.

Was die Bezeichnungsweise anbetrifft, so werde ich mich eng an die Bezeichnungen des Herrn Professor Kronecker, wie er sie in seiner Vorlesung über Determinantentheorie zu gebrauchen pflegte, anschliessen. Da ich mich ferner auf diese Vorlesung häufig zu stützen habe, so mache ich mit Vergnügen von der gütigen Erlaubniss des Herrn Professors Gebrauch, die Hauptsachen des über Mannigfaltigkeitslehre in jener Vorlesung Vorgetragenen in Kürze anzuführen: das soll in den §§ 1—3 geschehen. Zugleich verfehle ich nicht, an dieser Stelle meinen tiefgefühlten Dank gegen Herrn Prof. Kronecker für die gütige Erlaubniss im besondern, sowie für die Anregung und freundliche Förderung, die er mir bei dieser Arbeit hat zuteil werden lassen, im allgemeinen auszusprechen, und ferner meinem lebhaften Bedauern Ausdruck zu verleihen, dass es mir nicht vergönnt gewesen ist, ihm diese Arbeit veröffentlicht zu überreichen.

Es sei noch bemerkt, dass der besseren Uebersichtlichkeit wegen und um die Analogie mit Bekanntem schärfer hervortreten zu lassen, die Arbeit in Paragraphen eingeteilt ist, an deren Spitze, wenn tunlich, die Lehrsätze angegeben sind, deren Verallgemeinerung der betreffende Paragraph enthält.

§ 1.

Wie in der Ebene ein Punkt durch 2, im Raume durch 3 Abmessungen bestimmt wird, die man Coordinaten nennt, so, wollen wir sagen, bestimmen n Grössen — mit x_h ($h = 1, 2 \ldots n$) seien sie bezeichnet — einen Punkt in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, und alle Punkte dieser Mannigfaltigkeit werden erhalten, indem man den x_h, die wir auch hier Coordinaten nennen wollen, alle möglichen reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ giebt. Bestehen zwischen den x_h $n - \nu$ von einander unabhängige Gleichungen, oder sind alle x_h durch ν unabhängige Veränderliche ausgedrückt, so können nur ν der x_h beliebig gewählt werden, dadurch sind die übrigen bestimmt. Dabei werden aus sämtlichen Punkten der n-fachen Mannigfaltigkeit bestimmte ausgesondert, wir wollen sagen: alle diese Punkte liegen auf einer aus der n-fachen herausgeschnittenen ν-fachen Mannigfaltigkeit, und wir erklären die gegebenen Gleichungen als die Gleichungen dieser Mannigfaltigkeit. Sind diese Gleichungen linear, so nennen wir die Mannigfaltigkeit eben. Der Einfachheit halber, wollen wir eine ebene ν-fache Mannigfaltigkeit eine $\mathfrak{M}_\nu$, eine beliebige eine M_ν nennen.

Nach diesen Erklärungen ist die Gleichung einer $\mathfrak{M}_{n-1}$, die der Ebene im Raume, der Geraden in der Ebene entspricht,

$$\sum_r c_r\, x_{pr} = 0 \qquad (r = 0, 1 \ldots n)$$

wobei $x_{pr} (r = 1, 2 \ldots n)$ die laufenden Coordinaten sein sollen und $x_{po} = 1$ ist. Diese Gleichung enthält insofern eine Unbestimmtheit, als sie noch mit einem beliebigen Factor multiplicirt werden kann. Wählen wir diesen Factor als den reciproken Wert der positiven Quadratwurzel aus $\sum_{r=1}^{n} c_r'^2$, so erhalten wir die Form:

$$c_0 + \sum_{r=1}^{n} c_r x_{pr} = 0$$

mit der Bedingung

$$\sum_{r=1}^{n} c_r^2 = 1$$

Diese Form wollen wir als die Normalform der Gleichung einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnen.

Haben wir zwei $\mathfrak{M}_{n-1}$:

$$f = \sum_r c_r\, x_{pr} + c_0 = 0 \qquad \left(\sum_r c_r^2 = \sum_r c_r'^2 = 1 \right)$$
$$f' = \sum_r c_r'\, x_{pr} + c_0' = 0 \qquad \left(r = 1, 2 \ldots n \right)$$

so sei der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n} c_r c_r'$$

als der Correlationsfactor der beiden $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnet; wir schreiben:

$$\operatorname{cor}(f, f') = \sum_{r=1}^{n} c_r c_r'$$

Der Correlationsfactor entspricht dem cosinus des Neigungswinkels zweier Ebenen im Raume, zweier Geraden in der Ebene. Er liegt wie dieser zwischen -1 und $+1$, was man aus der folgenden Ungleichung sieht:

$$2(1 \mp \operatorname{cor}(f, f')) = \sum_r c_r^2 + \sum_r c_r'^2 \mp 2 \sum_r c_r c_r' = \sum_r (c_r - c_r')^2 > 0$$

Weiter erklären wir in der $\mathfrak{M}_n$ als den Abstand zweier Punkte, deren Coordinaten x_{1r} bzhw. x_{2r} seien $(r = 1, 2 \ldots)$, den Ausdruck:

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{n} (x_{1r} - x_{2r})^2}$$

Soll die Form dieses Ausdrucks erhalten bleiben, wenn wir die Coordinaten $x_h (h = 1, 2 \ldots n)$ linear durch andre $\xi_h (h = 1, 2 \ldots n)$

ausdrücken, oder mit andern Worten, um in Analogie zu Raum und Ebene zu reden, nehmen wir eine Coordinatentransformation vor, so ist notwendig und hinreichend, dass die Coefficienten der Transformation:

$$x_h = \alpha_h + \sum_k \alpha_{hk}\,\xi_k \qquad (h,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ n)$$

den Bedingungen genügen

$$\sum_h \alpha_{hi}\alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1, 2\ .\ .\ .\ n)$$

wobei $\delta_{ik} = 1$ ist für $i = k$, und $= 0$ für $i \gtrless k$. Es sei noch hierbei bemerkt, dass durch Coordinatentransformation sich die Gleichungen jeder $\mathfrak{M}_\nu$ auf die Form

$$x_s = 0 \qquad (s = \nu + 1\ .\ .\ .\ n)$$

bringen lassen, und dass Eigenschaften, die von dem Abstand von Punkten abhangen, und die sich für diese specielle Form der Gleichungen leicht erweisen lassen, ohne weiteres auch für die allgemeine Form der Gleichungen als giltig angesehen werden können.

Ferner erklären wir als den Abstand eines Punktes von einer $\mathfrak{M}_\nu$ den kürzesten unter den Abständen aller Punkte der $\mathfrak{M}_\nu$ von dem gegebenen Punkte. Es sei zunächst $\nu = n-1$ und der gegebene Punkt (x_{0r}) $(r = 1, 2\ .\ .\ .\ n)$; die Gleichung von $\mathfrak{M}_{n-1}$ in der Normalform:

$$c_0 + \sum_r c_r x_{pr} = 0 \quad (r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Die Bedingung, dass der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n} (x_{pr} - x_{0r})^2$$

ein Minimum werden soll, ergiebt dann die Gleichung:

$$x_{ph} - x_{0h} = -\,c_h \sum_{r=0}^{n} c_r x_{0r} \qquad (x_{0r} = 1,\ h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Mithin ist die Entfernung des Punktes von der $\mathfrak{M}_{n-1}$

$$((x_{0r}),\ \mathfrak{M}_{n-1}) = \sqrt{\Big(\sum_{r=0}^{n} c_r x_{0r}\Big)^2 \sum_{h=1}^{n} c_h^2}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} c_r x_{0r} = c_0 + \sum_{r=1}^{n} c_r x_{0r}$$

Dieser Ausdruck liefert also, abgesehen vom Zeichen, den Abstand des Punktes von der $\mathfrak{M}_{n-1}$, wie in der Ebene und im Raume.

Wir wollen nun in weiterer Analogie zu Ebene und Raum homogene Coordinaten von Punkt und $n-1$-facher Mannigfaltigkeit einführen. Dazu seien $n+1$ Punkte in der $\mathfrak{M}_n$ gegeben, gekennzeichnet durch die Zahlen $0, 1 \ldots n$. Die Coordinaten des Punktes g seien ξ_{gh} $(h = 1, 2 \ldots)$. Diese $n+1$ Punkte bestimmen in der $\mathfrak{M}_n$ ein Gebilde, das dem Dreieck in der Ebene, dem Tetraeder im Raume entspricht, wir wollen es Prismatoid nennen. Nun stellen wir uns zunächst die Aufgabe, die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$ zu bestimmen, welche alle Eckpunkte des Prismatoides, mit Ausnahme des Punktes k enthält. Zu diesem Zwecke betrachten wir das System

$$(\xi_{gh}) \quad (g, h = 0, 1 \ldots n; \qquad \xi_{go} = 1)$$

dessen Determinante sei Δ, ferner die zu ξ_{gh} gehörige Subdeterminante Δ_{hg}. Dann ist die Gleichung

$$\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk} = 0$$

die verlangte Gleichung der $\mathfrak{M}_{n-1}$, denn für

$$x_{ph} = \xi_{ik}$$

wird der Ausdruck linker Hand

$$= \delta_{ik} \Delta, \quad \text{also}$$

$$= 0 \quad \text{für} \quad i \gtrless k \quad \text{und} \quad = \Delta \quad \text{für} \quad i = k$$

Diese Gleichung hat aber noch nicht die Normalform, diese ist:

$$\frac{\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk}}{\Theta_k} = 0$$

wobei

$$\Theta_k^2 = \sum_{h=1}^{n} \Delta_{hk}^2 \quad \text{ist.}$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes x_{ph} von dieser $\mathfrak{M}_{n-1}$ ist dann gemäss dem Vorhergehenden

$$= \frac{\sum_{h=0}^{n}{}' x_{ph} \Delta_{ik}}{\Theta_k}$$

Nun erklären wir als homogene Coordinaten eines Punktes die Verhältnisse der Abstände dieses Punktes und eines Eckpunktes des Prismatoides von der $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle Eckpunkte mit Ausnahme dieses einen enthält. Bezeichnen wir die homogenen Coordinaten mit u_{pk}, so ist also

$$u_{pk} = \frac{\sum_{h=0}^{x} x_{ph} \Delta_{hk}}{\Theta_k} : \frac{\sum_{h=0}^{n} \xi_{kh} \Delta_{hk}}{\Theta_k} = \frac{\sum_{h=\sigma}^{n} x_{ph} \Delta_{hk}}{\Delta}$$

Setzen wir abkürzungsweise noch

$$\sum_{h=0}^{n} x_{ph} \Delta_{hk} = \Delta_p^{(k)}$$

so kommt:

$$u_k = \frac{\Delta_p^{(k)}}{\Delta} \quad (k = 0, 1 \ldots n)$$

Wir schreiten nun sofort zur Einführung der homogenen Coordinaten einer $\mathfrak{M}_{n-1}$, und wir erklären sie als die Verhältnisse der Abstände jedes Grundpunktes von der gegebenen $\mathfrak{M}_{n-1}$ und derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle anderen Grundpunkte enthält. Die gegebene $\mathfrak{M}_{n-1}$ sei bestimmt durch n Punkte

$$x_{ih} \quad (i = 0, 1 \ldots f-1, f+1 \ldots n; \quad h = 1, 2 \ldots n)$$

ferner seien

$$x_{fh} \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$

beliebige Grössen, D_{hg} die im System

$$(x_{gh}) \quad (g, h = 0, 1 \ldots n)$$

zum Element x_{gh} gehörige Subdeterminante, so ist die Gleichung der gegebenen $\mathfrak{M}_{n-1}$ in der Normalform:

$$\frac{\sum_{h=0}^{n} x_{ph} D_{hf}}{S_f} = 0$$

dabei

$$S_f^2 = \sum_{v=1}^{u} D_{vf}^2$$

Mithin ergiebt sich, wenn U_{fk} $(k = 0, 1 \ldots n)$ die homogenen Coordinaten der $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnen, nach der Erklärung:

$$U_{fk} = \frac{\sum_{h} \xi_{kh} D_{hf}}{S_f} : \frac{\sum_{h} \xi_{kh} \Delta_{hk}}{\Theta_k} \quad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

oder, wenn

$$\sum_{h=0}^{n} \xi_{hk} D_{hf} = D_f^{(k)}$$

gesetzt wird

$$U_{fk} = \frac{D_f^{(k)} \Theta_k}{S_f \Delta} \quad (k = 0, 1 \ldots n)$$

Es ist bekannt, dass zwischen den im Raume und in der Ebene

angewendeten homogenen Coordinaten Gleichungen bestehen; es handelt sich darum, die entsprechenden Beziehungen auch für die n-fache Mannigfaltigkeit festzustellen. Für einen Punkt gilt zunächst:

$$\sum_k u_{pk} = \frac{1}{\Delta} \sum x_{ph} \Delta_{hk} = \frac{1}{\Delta} \sum_{h,k} x_{ph} \xi_{ko} \Delta_{hk} = \frac{1}{\Delta} \sum_h x_{ph} \delta_{oh} \Delta$$

$$(h, k = 0, 1 \ldots n)$$

$$= x_{ko} = 1, \quad \text{also}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_{pk} = 1$$

Die zwischen den homogenen Coordinaten einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ bestehende Beziehung ergiebt sich nach einiger Rechnung leicht als

$$\sum_{i,k} U_{fi} U_{fk} \operatorname{cor}(\varphi_i, \varphi_k) = 1 \quad (i, k = 0, 1 \ldots n)$$

wobei φ_i die durch die Grundpunkte $0, 1 \ldots i-1, i+1, \ldots n$ gelegte $\mathfrak{M}_{n-1}$ bezeichnet.

§ 2.

Es ist bekannt, dass der Inhalt eines Dreiecks bzhw. Tetraeders durch die Determinante

$$| x_{ik} | \ (i, k = 0, 1, 2 \text{ bzhw. } 0, 1, 2, 3, \quad x_{io} = 1)$$

geliefert wird, er ist nämlich gleich dieser Determinante dividirt durch 2! bzhw. 3! Wir werden nun zeigen, dass in einer $\mathfrak{M}_n$ der Inhalt eines Prismatoides

$$= \frac{1}{n!} | x_{ik} | \ (i, k = 0, 1 \ldots n; \quad x_{io} = 1)$$

ist. Ist

$$\sum_h D_{hk} x_{ph} = D_p^{(k)} \quad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

so ist, wie wir oben gesehen hatten:

$$D_p^{(k)} = 0$$

die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_{n-1}$, welche alle Eckpunkte des Prismatoides mit Ausnahme des Punktes k enthält. (Die Eckpunkte seien (x_{hk}) $(h, k = 0, 1 \ldots n)$). Diese $\mathfrak{M}_{n-1}$ kann aber auch dargestellt werden durch die Gleichung

$$f_k = -\frac{D_p^{(k)}}{D} = 0, \quad D = | x_{ik} | \ (i, k = 0, 1 \ldots n)$$

Für den Punkt (x_{kh}) $(h = 0, 1 \ldots n)$ wird

$$f_k = -1$$

Da nun die $\mathfrak{M}_{n-1}$ sämtliche Punkte der $\mathfrak{M}_n$, für welche $f_k < 0$ ist, von denen scheidet, für welche $f_k > 0$ ist, so können wir sagen: der Punkt k liegt auf der negativen Seite der $\mathfrak{M}_{n-1}$:

$$f_k = 0$$

Nun ist

$$\sum_k f_k = -\sum_{h,k} \frac{x_{ph} D_{hk}}{D} = -\frac{1}{D} \sum_{h,k} x_{ph} D_{hk} x_{ko}$$

$$= -\frac{1}{D} \sum_h x_{ph} \delta_{ok} D = -x_{po} = -1 \quad (h,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

und das gilt für jeden beliebigen Punkt.

Daraus ergiebt sich ohne weiteres, dass es keinen Punkt giebt, für welchen alle $f_k > 0$ sind; es giebt aber sehr wol Punkte, für welche alle $f_k < 0$ sind, da aber die Summe der $f_k = -1$ sein soll, giebt es nur ein einziges Gebiet solcher Punkte, während bei allen übrigen der im ganzen 2^{n+1} möglichen Zeichencombinationen der f_k die entsprechenden Gebiete unendlich sind. Das endliche Stück der $\mathfrak{M}_n$ wird also erklärt durch die Ungleichungen

$$f_k < 0 \quad (k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

und wir wollen nun in Analogie zu Ebene und Raum das Integral

$$\int dx_{p1}\, dx_{p2}\ .\ .\ .\ dx_{pn}$$

erstreckt über alle Werte der x_{pk}, welche obigen Ungleichungen genügen, als den Inhalt des aus den Punkten (x_{ih}) $(i = 0, 1\ .\ .\ .\ n)$ gebildeten Prismatoides nennen. Zur Ermittelung dieses Integrals verfahren wir folgendermassen. Es ist:

$$-\sum_k x_{kg} f_k = \sum_k x_{kg} \frac{D_p^{(k)}}{D} = \sum_{h,k} x_{kg} x_{ph} \frac{D_{hk}}{D} = \sum_h x_{ph} \delta_{hg}$$

$$(h,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$= x_{pg}$$

Daraus folgt ohne Weiteres

$$x_{pg} - x_{og} = -\sum (x_{kg} - x_{og}) f_k \quad (g,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$\frac{\partial x_{pg}}{\partial f_k} = -(x_{kg} - x_{og}) \qquad (g,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

und

$$\left\| \frac{\partial x_{pk}}{\partial f} \right\| = \| x_{ik} - x_{ok} \| = \| x_{gh} \| \quad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ g,\ h = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Nun ist bekanntlich:

$$\int dx_{p1} \ldots dx_{pn} = \int \left\| \frac{\partial x_{pk}}{\partial f_i} \right\| df_1 \ldots df_n$$

also kommt, wenn wir den Inhalt des Prismatoides mit J bezeichnen:

$$J = \| x_{ik} - x_{ok} \| \int df_1 \ldots df_n = \| x_{gh} \| \int df_1 \ldots df_n$$

$$\begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ g, h = 0, 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

mit den Bedingungen

$$-1 < \sum_k f_k < 0, \quad f_k < 0$$

Hierfür bestimmt sich das Integral

$$\int df_1 \ldots df_n \quad \text{als} \quad \frac{1}{n!}$$

sodass wir erhalten

$$J = \frac{1}{n!} \| x_{ik} - x_{ok} \| - \frac{1}{n!} \| x_{gh} \| \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ g, h = 0, 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Wir wenden uns nun zu Untersuchungen über die Beziehungen von Inhaltsdeterminanten zu gewissen aus den Verbindungsstrecken je zweier Punkte gebildeten Determinanten. Es seien (x_{ok}), (ξ_{ok}) $(k = 1, 2 \ldots n)$ zwei Punkte der $\mathfrak{M}_n$, ferner (x_{ik}), (ξ_{ik}) $(i, k = 1, 2 \ldots n)$ weitere $2n$ Punkte, welche zu den beiden ersten in den Beziehungen stehen:

$$\sum_k (x_{ik} - x_{ok})^2 = r^2$$

$$\sum_k (\xi_{ik} - \xi_{ok})^2 = \varrho^2 \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Diese Gleichungen können wir als die Bedingungen dafür erklären, dass die Punkte (x_{ik}), $(i = 1, 2 \ldots n)$ bzhw. (ξ_{ik}) auf einer sphärischen Mannigfaltigkeit liegen, deren Mittelpunkte (x_{ok}) bzhw. (ξ_{ok}) sind, unter sphärischer Mannigfaltigkeit dabei die einer Kugel im Raume entsprechende Mannigfaltigkeit verstanden. Wir setzen nun

$$\sum_h (x_{ih} - \xi_{kh}) = s_{ik}^2 \quad (h, i, k = 0, 1 \ldots n)$$

und erklären c_{ik} durch die Gleichung

$$\sum_h (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) = s_{io}\, s_{ok}\, c_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Betrachten wir jetzt die Determinante

$$| s_{ik} - t | \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

diese ist

$$= | s_{ik}{}^2 | + t \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}{}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

oder

$$= | s_{ik} | + t S_n$$

wobei die Bedeutung von S_n klar ist. Wird

$$t = r^2 + \varrho^2 - s_{oo}{}^2$$

gesetzt, so geht diese Gleichung über in

$$| s_{ik}{}^2 - r^2 - \varrho^2 + s_{oo}{}^2 | = | s_{ik}{}^2 | + t S_n \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Weiter ist aber

$$s_{ik}{}^2 - r^2 - \varrho^2 + s_{oo}{}^2 = \sum_h \{(x_{kh} - \xi_{kh})^2 - (x_{ih} - x_{oh})^2$$
$$- (\xi_{kh} - \xi_{oh})^2 + (x_{oh} - \xi_{oh})^2\}$$
$$= -2 \sum_h (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) = -2 s_{io} s_{ok} c_{ik}$$

Mithin kommt:

$$| s_{ik} - r^2 - \varrho^2 + s_{oo}{}^2 | = (-2)^n | x_{ih} - \xi_{ok} || \xi_{ik} - x_{ok} |$$
$$= (-2)^n \Pi (s_{ko} s_{ok}) | c_{ik} |$$
$$(l, k = 1, 2 \ldots n)$$

also schliesslich

$$| s_{ik}{}^2 | + (r^2 + \varrho^2 - s_{oo}{}^2) S_n = (-2)^n | x_{ik} - \xi_{ok} || \xi_{ik} - x_{ok} |$$
$$= (-2)^n \Pi (s_{ko} s_{ok}) | c_{ik} |$$

Diese Gleichung specialisiren wir nun, indem wir setzen:

$$x_{ok} = \xi_{ok} = 0; \qquad r = \varrho$$

$$x_{in} = r + \frac{a_i}{r}, \quad \xi_{in} = r + \frac{\alpha_i}{r}$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n)$$

so werden die Bedingungen, dass die Punkte (x_{ih}), (ξ_{ih}) $(i, h = 1, 2 \ldots n)$ auf einer sphärischen Mannigfaltigkeit liegen

$$\sum_g x_{ig}{}^2 + 2a_i + \frac{a_i{}^2}{r^2} = \sum_g \xi_{ig}{}^2 + 2\alpha_i + \frac{\alpha_i{}^2}{r^2} = 0$$
$$(g = 1, 2 \ldots n-1; \qquad i = 1, 2 \ldots n)$$

ferner wird:

$$s_{oo} = 0$$

$$s_{ko}^2 = \sum_{g=1}^{n} x_{kg}^2 = r^2, \quad s_{ok}^2 = \sum_{g=1}^{n} \xi_{kg}^2 = r^2$$

$$s_{ik}^2 = \sum_{g=1}^{n-1} (x_{ig} - \xi_{kg})^2 + \left(\frac{a_i - \alpha_i}{r}\right)^2$$

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} \frac{x_{ih}\,\xi_{kh}}{r^2} \qquad (i,\ k = 12 \ldots n)$$

Mit Benutzung hiervon folgt

$$(-2)^n \mid x_{ik} \mid \mid \xi_{ik} \mid = \mid s_{ik}^2 \mid + 2r^2 S_n$$

oder

$$(-2)^n \frac{\mid x_{ik} \mid}{r} \frac{\mid \xi_{ik} \mid}{r} = \frac{\mid s_{ik}^2 \mid}{r^2} + 2S_n \qquad (i,\ k = 12 \ldots n)$$

Nun ist

$$\frac{\mid x_{ik} \mid}{r} = \left| x_{i1},\ x_{i2}, \ldots x_{in-1},\ 1 + \frac{a_i}{r^2} \right|$$

$$= \mid x_{ih} \mid + \frac{1}{r^2} \mid x_{i1} \ldots x_{in-1}\, a_i \mid \quad \begin{pmatrix} i,\ k = 1, 2 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n-1, 0 \end{pmatrix}$$

entsprechend wird $\frac{\mid \xi_{ik} \mid}{r}$. Gehen wir jetzt für $r = \infty$ zur Grenze über, so wird obige Gleichung:

$$(-2)^n \mid x_{ih} \parallel \xi_{ih} \mid = 2S_n \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1, 2 \ldots r \\ h = 0, 1 \ldots n-1 \end{pmatrix}$$

Setzen wir hierin $n+1$ an die Stelle von n und bezeichnen die Punkte $(x_{n+1,h})$ und $(\xi_{n+1,h})$ mit x_{oh} bzw. ξ_{oh}, so wird

$$s_{ik}^2 = \sum_h (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

und

$$-(-2)_n \mid x_{ik} \parallel \xi_{ik} \mid \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

Nun bestehen zwar zwischen den x_{ih} und ξ_{ih} noch die Bedingungen

$$\sum_h x_{ih}^2 + 2\alpha_i = \sum_h \xi_{ih} + 2\alpha_i = 0$$

da aber a_i und α_i ganz beliebig sind, so bestehen in der Tat zwischen den x und ξ keinerlei Beziehungen. Mithin gilt die Formel

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \parallel \xi_{ik} \mid = \begin{vmatrix} 0 \ . \ . \ . 1 \ . \ . \ . \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ 1 \ . \ . \ . s_{ik}^2 \ . \ . \ . \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1 \ . \ . \ . n)$$

ganz allgemein.

Wir wollen den Gang, den wir zur Herleitung dieser zwischen den Inhalten zweier Prismatoide (denn die Determinante $\mid x_{ik} \mid$ $(i, k = 0, 1 \ . \ . \ . n)$ lieferte ja den Inhalt) und den Entfernungen je zweier ihrer Eckpunkte bestehenden Relation eingeschlagen haben, in Kürze für den dreidimensionalen Raum noch einmal vorführen, um ihn so dem Verständniss näher zu bringen. Wir nehmen zunächst zwei Kugeln und auf deren Oberfläche je 3 Punkte und entwickeln eine Beziehung, die zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte und den Entfernungen je zweier besteht. Dann lassen wir die Kugeln zusammenfallen und den Radius unendlich werden, doch so, dass dabei die Entfernungen der einzelnen Punkte endlich bleiben. Die Punkte kann man nun als in einer Ebene liegend betrachten und die vorher abgeleitete Relation liefert die bekannte Beziehung zwischen den Inhalten zweier Dreiecke und den Verbindungsstrecken je zw eier ihrer Eckpunkte.

Setzen wir in der Gleichung

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \parallel \xi_{ik} \mid = \begin{vmatrix} 0 \ . \ . \ . 1 \ . \ . \ . \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ 1 \ . \ . \ . s_{ik}^2 \ . \ . \ . \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{vmatrix}$$

nach

$$x_{i,\nu+r} = \xi_{i,\nu+r} = 0 \qquad (r > 0)$$

betrachten wir also mit andern Worten zweimal $n+1$ Punkte einer ν-fachen Mannigfaltigkeit, so verschwinden die Inhaltsdeterminanten mithin verschwindet auch die aus den Verbindungsstrecken gebildete Determinante rechter Hand.

Identificiren wir das System der ξ mit dem der x, so geht obige Gleichung über in

$$-(-2)^n \mid x_{ik} \mid = \begin{vmatrix} 0 \ . \ . \ . 1 \ . \ . \ . \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ 1 \ . \ . \ . s_{ik}^2 \ . \ . \ . \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1, 2 \ . \ . \ . n)$$

oder

$$-(-2)^2(n!\,J)^2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 0, 1 \dots n)$$

wobei J wie oben den Inhalt des aus den Punkten (x_{ih}) $(i = 0, 1 \dots n)$ gebildeten Prismatoides bezeichnet. Rücken die $n+1$ Punkte in eine niedere Mannigfaltigkeit als die n-fache zusammen, so verschwindet die Inhaltsdeterminante und folglich auch die rechter Hand stehende Streckendeterminante.

Setzen wir ferner in der zuerst abgeleiteten Gleichung

$$|\, s_{ik}^2 \,| + (r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2)\, S_n = (-2)^n \,|\, x_{ik} - \xi_{0k} \,||\, \xi_{ik} - x_{0k} \,|$$
$$(i, k = 1, 2 \dots n)$$

$n+1$ an die Stelle von n und bezeichnen die Punkte $(x_{n+1,h})$; $(\xi_{n+1,h})$ mit (x_{0h}) bzhw. (ξ_{0h}), lassen zu gleicher Zeit die vorher mit (x_{0h}), (ξ_{0h}) bezeichneten Grössen verschwinden, setzen dann

$$x_{in+1} = \xi_{in+1} = 0 \quad (i = 0, 1 \dots n), \quad r = \varrho$$

d. h. betrachten wir in einer n-fachen Mannigfaltigkeit zweimal $n+1$ Punkte, die auf einer um den Nullpunkt construirten sphärischen Mannigfaltigkeit mit dem Radius r liegen, so kommt:

$$|\, s_{ik} \,| + 2r^2 \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 0, 1 \dots n)$$

Identificiren wir nun noch das System der ξ mit dem der x, so liefert die resultirende Formel:

$$r^2 = -\frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & s_{ik}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{|\, s_{ik}^2 \,|} \qquad (i, k = 0, 1 \dots n)$$

den Radius derjenigen sphärischen Mannigfaltigkeit, die durch alle Eckpunkte eines in der $\mathfrak{M}_n$ liegenden Prismatoides geht, ausgedrückt durch die Verdindungsstrecken je zweier Ecken. Im Nenner des Ausdrucks steht diejenige Streckendeterminante, welche den Inhalt bestimmt.

Was nun die Grössen c_{ik} betrifft, die wir oben eingeführt haben, so sieht man, dass sie zur Herleitung der von uns benutzten Resultate nicht nötig gewesen wären, ihre Einführung ist aber doch geschehen, weil sie Grössen von der Art sind, wie wir sie Correlationsfactoren genannt haben und die für Raum und Ebene Richtungscosinus werden. Lassen wir die Mannigfaltigkeit, in der die Punkte liegen, auf eine niedre zusammenschrumpfen, so sieht man sofort, dass die Determinante

$$| c_{ik} | \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

verschwindet. Diese Bedingung ist die Verallgemeinerung derjenigen interessanten Beziehung die zwischen den Richtungscosinus von vier (oder mehr) von irgend einem Punkt ausgehenden Strahlen besteht.

Wir hatten gesehen, dass die Determinante

$$S_n = \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

verschwindet, sobald $n > N+1$, N sei die Ordnung der Mannigfaltigkeit, dass sie durch die Inhaltsdeterminante ausgedrückt wird, sobald $n = N+1$ ist; es fragt sich nun, in welcher Weise sie sich darstellt für $n < N+1$, d. h. wenn das von den Punkten gebildete Prismatoid nicht von der Ausdehnung der Mannigfaltigkeit, sondern von andrer ist.

Um diese Frage zu entscheiden, gehen wir aus von der Gleichung

$$(-2)^n \Sigma (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) \mid = \mid s_{ik}^2 \mid + (r^2 + \varrho^2 - s_{oo}^2) S_n$$
$$(h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Aus der Herleitung dieser Beziehung ersieht man sofort, dass die Summation in Bezug auf h beliebig weiter z. B. bis zu N hin erstreckt werden kann ($N > n$), nur müssen dann s_{ik}, r, ϱ anders erklärt werden, nämlich

$$s_{ik}^2 = \sum_h (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots N)$$
$$r^2 = \sum_h (x_{ih} - x_{oh})^2$$
$$\varrho^2 = \sum_h (\xi_{ih} - \xi_{oh})^2$$

dann erhalten wir also die Gleichung:

$$(-2)^n \mid \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh}) \mid = \mid s_{ik}^2 \mid + (r^2 + \varrho^2 - s_{oo}^2) S_n$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Das System

$$(\sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{oh})(\xi_{kh} - x_{oh})) \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

dessen Determinante auf der linken Seite vorkommt, lässt sich als aus den beiden rechteckigen Systemen

$$(x_{ih} - \xi_{oh}), \quad (\xi_{ih} - x_{oh}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots N \end{pmatrix}$$

componirt betrachten. Die Determinante ergiebt sich also als eine Summe von Producten von Determinanten $n$ter Ordnung, zu bilden aus dem Schema der beiden Systeme. Setzen wir nun, entsprechend dem oben eingeschlagenen Verfahren,

$$\varrho = r, \qquad \xi_{oh} = x_{oh} = 0 \quad (h = 1, 2 \ldots N)$$
$$x_{iN} = r + \frac{a_i}{r}, \quad \xi_{iN} = r + \frac{\alpha_i}{r} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

und setzen nach Division von r^2 wieder $r = \infty$, so kommt

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} \mid x_{ih} \parallel \xi_{ih} \mid = S_n \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ h = 0, h_1 \ldots h_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$(\xi_{io} = x_{io} = 1)$$

wo die Summe über alle Combinationen der Zahlen $1, 2 \ldots N-1$ zu $n-1$ Elementen zu erstrecken ist.

Schreiben wir noch N für $N-1$, so erhalten wir:

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} \mid x_{ih} \parallel \xi_{ih} \mid = S_n \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2 \ldots n \\ h = 0, h_1 \ldots h_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dazu ist

$$s_{ik}^2 = \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{kh})^2$$

und $(h_1 \ldots h_{n-1})$ bedeuten alle Combinationen der Zahlen $1 \ldots N$ zu $n-1$ Elementen.

Identificiren wir nun das System der ξ mit dem der x, so folgt

$$-(-2)^{n-1} \sum_{(h)} \mid x_{ih} \mid^2 = S_n \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

dabei ist:

$$s_{ik} = \sum_{h=1}^{N} (x_{ih} - \xi_{kh})^2 \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Wir sehen also, dass die Determinante S_n, di e für $n > N+1$ verschwand, für $n = N+1$ durch die Inhaltsdeterminante ausgedrückt war, für $n < N+1$ durch eine Summe von Producten von Inhaltsdeterminanten dargestellt wird, die Gebilden einer niederen Mannigfaltigkeit entsprechen. Die zuletzt abgeleitete Gleichung wollen wir nun noch auf eine etwas andre Form bringen. Wir schreiben n für N, $\nu+1$ für n und bezeichnen den Punkt $(x_{\nu+1,h})$ mit (x_{0h}) $(h = 1, 2 \ldots n)$, so wird die Gleichung zu:

$$-(-2)^{\nu} \sum_{(h)} | x_{ih} |^2 = \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 0, 1 \ldots n \\ h = 0, h_1 \ldots h_\nu \end{pmatrix}$$

oder auch:

$$-(-2)^{\nu} \sum_{(h)} | x_{gh} - x_{0h} |^2 = \begin{vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \ldots s_{ik}^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = 0, 1 \ldots \nu \\ g = 1, 2 \ldots n \\ h = h_1, \ldots h_\nu \end{pmatrix}$$

Nun ist die Summe, welche linker Hand steht, nichts anderes als die Determinante des Systems

$$\left(\sum_{h=1}^{n} (x_{fh} - x_{0h})(x_{gh} - x_{0h}) \right) \qquad (f, g = 1, 2 \ldots \nu)$$

welches als durch Composition des Systems

$$(x_{fh} - x_{0h}) \quad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

mit sic h selbst entstanden gedacht werden kann. Wir können also die Determinante d es componirten Systems als von dem rechteckigen System abhängig betrachten, und wir wollen die positive Quadratwurzel dieser Determinante als die absolute Determinante des rechteckigen Systems bezeichnen und schreiben:

$$\| x_{fh} - x_{0h} \| \quad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Für quadratische Systeme wird die absolute Determinante gleich dem absoluten Betrage der Determinante des Systems.

Mit dieser Einführung können wir schreiben:

$$-(-2)^{\nu}\,\|\,x_{fh}-x_{oh}\,\|^{2}=\begin{vmatrix} 0 & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & s_{ik}{}^{2} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}\quad\begin{pmatrix} i,\ k=0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu \\ f=1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ h=1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Nun liegen die $\nu+1$ Punkte $(x_{ih})\ \begin{pmatrix} i=0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu \\ h=1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$ in einer $\mathfrak{M}_{\nu}$ und bestimmen in dieser ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung; dessen Inhalt wird aber nach dem Obigen geliefert durch

$$-(-2)^{\nu}(\nu!\,J_{\nu})^{2}=\begin{vmatrix} 0 & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & s_{ik}{}^{2} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}\qquad(i,\ k=0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu)$$

sodass sich im Verein mit der vorhergehenden Gleichung

$$J_{\nu}=\frac{1}{\nu!}\,\|\,x_{fh}-x_{oh}\,\|\quad\begin{pmatrix} f=1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ h=1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}.$$

ergiebt. Diese Formel gilt auch, wenn $\nu=n$ wird, sodass sie also ganz allgemein den Inhalt eines Prismatoides ν-facher Ausdehnung, das durch $\nu+1$ Punkte bestimmt wird, angiebt.

§ 3.

Die Begriffe des Senkrecht-auf-einander-stehens und der Parallelität von Ebenen und Geraden im Raume sind von grosser Bedeutung zur Erkennung der Eigenschaften räumlicher Gebilde, wir schicken uns deswegen an, diese Begriffe auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern.

Durch die Punkte $(x_{ir})\ \begin{pmatrix} i=0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu \\ r=1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$ sei eine $\mathfrak{M}_{\nu}$ bestimmt, ausserhalb derselben der Punkt $(x_{\nu+1,r})$ gegeben, es soll zunächst der Abstand des Punktes von der $\mathfrak{M}_{\nu}$ gefunden werden. Nach der von uns oben aufgestellten Erklärung muss x_{pr} so bestimmt werden, dass der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n}(x_{pr}-x_{\nu+1,r})^{2}$$

ein Minimum wird; dann stellt eben dieser Ausdruck den Abstand dar.

Bezeichnet $((x_{\nu+1,r}),\mathfrak{M}_{\nu})$ den letzteren, so findet man

$$((x_{\nu+1,r}), \mathfrak{M}_\nu) = -\frac{\| x_{mr} - x_{or} \|}{\| x_{ir} - x_{or} \|} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2 \ldots \nu+1 \\ i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Ist J_ν der Inhalt des Prismatoides, welches die Punkte $0, 1 \ldots \nu$ bilden, und $J_{\nu+1}$ der Inhalt des durch die Punkte $0, 1 \ldots \nu+1$ bestimmten Prismatoides, so folgt hieraus ohne weiteres

$$J_{\nu+1} = \frac{J_\nu((x_{\nu+1,r}), \mathfrak{M}_\nu)}{\nu+1}$$

Der durch diese Gleichung ausgedrückte Satz ist das wichtige Analogon zu dem für Ebene und Raum giltigen Satze, der für die Ebene den doppelten Inhalt eines Dreiecks als durch das Product von Grundlinie und Höhe gegeben lehrt.

Eine $\mathfrak{M}_\nu$ lässt sich auf zwei Weisen darstellen, entweder durch das Gleichungssystem

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

oder durch das System

$$\sum_r \gamma_{kr}(x_{pr} - x_{or}) = \quad \begin{pmatrix} k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Zwischen den Coefficienten beider Darstellungsweisen gelten, wie man leicht sieht, die Beziehungen

$$\sum_r \gamma_{kr} c_{ir} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Die beiden Systeme

$$(c_{ir}) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad (\gamma_{kr}) \quad \begin{pmatrix} k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

ergänzen wir nun durch beliebige Grössen zu quadratischen Systemen

$$(c_{gh}) \quad \text{und} \quad (\gamma_{gh}) \quad (g, h = 1, 2 \ldots n)$$

und wollen diese Grössen so bestimmen, dass die Composition beider Systeme das Einheitssystem liefert. Diese Forderung steht mit den Gleichungen

$$\sum_r \gamma_{kr} c_{ir} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

nicht in Widerspruch, und die Anzahl der zu bestimmenden Grössen ist auch nicht kleiner als die Anzahl der Bestimmungsgleichungen.

Wir sehen also: im allgemeinen Falle sind die Coefficientensysteme der beiden Darstellungsweisen einer $\mathfrak{M}_\nu$ reciprok; es lassen sich nun diese Systeme so umformen, dass die beiden Darstellungsweisen identisch werden.

Da das System (c_{ir}) den Rang ν haben muss, weil ja sonst die $\mathfrak{M}_\nu$ auf eine Mannigfaltigkeit niederer Ordnung zusammenschrumpfen würde, so muss mindestens eine der aus dem System zu bildenden Determinanten νter Ordnung von null verschieden sein, es sei dies die Determinante

$$|\, c_{ir} \,| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = r_1, r_2 \ldots r_\nu \end{pmatrix}$$

Dann führen wir statt der w_i andre Grössen w_i' durch die Gleichungen

$$w_h' = \sum_i c_{ir_h} w_i \qquad (h, i = 1, 2 \ldots \nu)$$

ein, so geht das Gleichungssystem

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

über in ein System von der Gestalt

$$\begin{aligned} x_{pr_h} - x_{or_h} &= w_h' \\ x_{pr} - x_{or} &= \sum_i a_{ir} w_i' \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2 \ldots \nu \\ r > \text{od.} < r_h \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt sofort auch die andre Darstellungsweise:

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ir} (x_{pr_i} - x_{or_i}) \qquad \begin{pmatrix} r > \text{od.} < r_h \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das (c) System hat in diesem Fall die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \ldots 0, a_{1,\nu+1} \ldots a_{1n} \\ 0, 1 \ldots 0, a_{2,\nu+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0 \ldots 1, a_{\nu,\nu+1} \ldots a_{\nu n} \end{pmatrix}$$

Wir wollen dann sagen: das Gleichungssystem der $\mathfrak{M}_\nu$ ist in der kanonischen Form.

Es sei jetzt eine $\mathfrak{M}_\nu$ vorgelegt, gegeben durch die beiden Gleichungssysteme:

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i c_{ir} w_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$\sum_r \gamma_{kr} (x_{pr} - x_{or}) = 0$$

dann wird der Punkt x_{pr} dieser $\mathfrak{M}_\nu$, welcher unter allen Punkten der $\mathfrak{M}_\nu$ von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkt $x_{\nu+1\,r}$ den kleinsten Abstand hat, durch die Gleichungen

$$\sum_r c_{ir} (x_{pr} - x_{\nu+1,r}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$\sum_r \gamma_{kr} (x_{pr} - x_{or}) = 0 \qquad \text{bestimmt.}$$

Es sei jetzt der Punkt (x_{pr}) fest, und wir wollen den Punkt $(x_{\nu+1\,r})$ sich so bewegen lassen, dass von allen Punkten der $\mathfrak{M}_\nu$ immer der Punkt (x_{pr}) ihm am nächsten ist. Dann hat $(x_{\nu+1,r})$ nur den Gleichungen

$$\sum_r c_{ir} (x_{pr} - x_{\nu+1,r}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

zu genügen. Infolge dessen durchläuft dieser Punkt eine $\mathfrak{M}_{n-\nu}$. Lassen wir nun noch den Punkt (x_{or}) mit (x_{pr}) zusammenfallen und bezeichnen diesen Punkt mit (x_{or}), so gelten für die $\mathfrak{M}_r$ die Darstellungen, unter x_{pr} laufende Coordinaten verstanden:

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_i e_{ir} w_i$$

und

$$\sum_r \gamma_{kr} (x_{pr} - x_{or}) = 0$$

und für die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$:

$$\sum_r c_{ir} (x_{pr} - x_{or}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

und

$$x_{pr} - x_{or} = \sum_k \gamma_{kr} w_k$$

Die zweite Darstellungsweise der $\mathfrak{M}_{n-r}$ folgt unmittelbar aus dem Obengesagten.

Aus diesen beiden Gleichungssystemen erkennt man sofort, dass $\mathfrak{M}_r$ zu $\mathfrak{M}_{n-r}$ in derselben Beziehung steht, wie diese zu $\mathfrak{M}_r$; die Beziehung ist also eine gegenseitige, und wir erklären:

Zwei Mannigfaltigkeiten sind normal zu einander, sobald unter den Abständen, die alle Punkte der einen von allen Punkten der andern haben, gerade die von dem beiden Mannigfaltigkeiten gemeinsamen Punkt die kürzesten sind.

Es sei noch bemerkt, dass die Mannigfaltigkeiten nur einen

einzigen Punkt mit einander gemein haben. Für einen gemeinsamen Punkt gelten nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\sum_r c_{ir}(x_{pr} - x_{rr}) = 0 \\ &x_{pr} - x_{or} = \sum_k c_{kr} w_k \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Aus denen folgt zur Bestimmung der w_k:

$$\sum_{k,r} c_{ir} c_{kr} w_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Hieraus entweder

$$w_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$$

oder

$$\left| \sum_{r=1}^{n} c_{ir} c_{kr} \right| = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$$

Nun ist

$$\left| \sum_r c_{ir} c_{kr} \right| = \| c_{ir} \|^2 \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

also sicher nicht $= 0$, da das c-System den Rang ν haben muss, mithin kommt

$$w_k = 0 \quad (k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$$

womit die obige Behauptung erwiesen ist.

Die Mannigfaltigkeiten, die wir eben einer Betrachung unterzogen haben, waren so beschaffen, dass ihre Ordnungszahlen sich zu n ergänzten, wir untersuchen jetzt zwei beliebige Mannigfaltigfaltigkeiten νter Ordnung gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}_\nu \qquad x_{pr} = c_{or} + \sum_i c_{ir} w_i \\ &\mathfrak{M}_\nu' \qquad x_{pr}' = x_{0r}' + \sum_i c_{ir}' w_i' \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu \\ r = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

(x_{pr}) sei ein Punkt von $\mathfrak{M}_\nu$, und es bezeichne (x_{pr}') gerade denjenigen Punkt von $\mathfrak{M}_\nu'$, der von ihm die kleinste Entfernung habe. Wir können dann (x_{pr}) als die Projection von (x_{pr}) auf $\mathfrak{M}_\nu'$ bezeichnen. Gemäss früher abgeleitetem wird (x_{pr}') bestimmt durch die Gleichungen

$$\sum_{r=1}^{n} c_{ir}'(x_{pr}' - x_{pr}) = 0 \quad (i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$$

Nun seien (x_{ir}) $(i = 0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu)$ $\nu + 1$ Punkte auf $\mathfrak{M}_\nu$, ihre Projectionen auf $\mathfrak{M}_\nu'$ seien (x_{ir}'), ferner werde (x_{ir}) bestimmt durch die Parameter w_{ih} $(h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ \nu)$, entsprechend (x_{ir}') durch w_{ih}' $(h = 1,\ 2\ .\ .\ \nu)$, so bestehen die Gleichungen:

$$x_{ir} = c_{or} + \sum_h c_{hr} w_{ih} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots \nu \\ i = 0, 1 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$
$$x^i{}_r' = c_{or}' + \sum_h c_{hr}' w_{ih}'$$

Daraus folgt

$$x_{ir} - x_{or} = \sum_h c_{hr} (w_{ih} - w_{oh})$$
$$x_{ir}' - x_{or}' = \sum_h c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}') \qquad \begin{pmatrix} h,\ i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Ferner ist aber auch

$$\sum_r c_{kr}' (x_{ir}' - x_{ir}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1 \ldots \nu \\ k = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Mithin erhält man

$$\sum_r c_{or}' \{x_{ro}' + \sum_h c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}') - x_{or} - \sum_h c_{hr} (w_{ih} - w_{oh})\} = 0$$
$$\begin{pmatrix} r = 1, 2 \ldots n \\ h,\ i,\ k = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

oder

$$\sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}') = \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr} (w_{ih} - w_{oh})$$

Aus diesem sowie aus den beiden Gleichungssystemen

$$x_{ir} - x_{or} = \sum_h c_{hr} (w_{ih} - w_{oh})$$
$$x_{ir}' - x_{or}' = \sum_h c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}') \qquad \begin{pmatrix} i,\ h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

ergiebt der Uebergang zu den Determinanten die Beziehungen:

$$\| x_{ir} - x_{or} \| = \| c_{hr} \| \cdot \| w_{ih} - w_{oh} \|$$
$$\| x_{ir}' - x_{or}' \| = \| c_{hr}' \| \cdot \| w_{ih}' - w_{oh}' \| \qquad \begin{pmatrix} r,\ h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

$$\left| \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr}' (w_{ih}' - w_{oh}') \right| = \left| \sum_{r,h} c_{kr}' c_{hr} (w_{ih} - w_{oh} \right|$$

Nach einigen Umformungen wird die letzte Gleichung zu:

$$\| c_{ir}' \|^2 \left| w_{ih}' - w_{oh}' \right| = \left| \sum_r c_{ir}' c_{hr} \right| \left| w_{ih} - w_{oh} \right|$$

$$(i,\ h = 1, 2 \ldots \nu;\quad r = 1, 2 \ldots n)$$

In Verbindung mit den beiden oberen liefert diese

$$\frac{\| x i_r' - x_{or}' \|}{\| x_{ir} - x_{or} \|} = \frac{\| \sum_r c_{hr} c_{ir}' \|}{\| e_{ir} \| \cdot \| c_{ir}' \|} \qquad \begin{pmatrix} i,\ h = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung lehrt: Der Inhalt eines durch Projection auf eine ν-fache Mannigfaltigkeit von einer andern entstandenen Gebildes hat zu dem Inhalt des projicirten Gebildes ein von der Lage der Eckpunkte unabhängiges Verhältniss. Aus dieser Form der Darstellung ersieht man auch, dass es ganz gleich ist, welches die projicirte Mannigfaltigkeit ist. Der Ausdruck bezeichnet eine gegenseitige Beziehung, wir nennen ihn den Correlationsfactor der beiden Mannigfaltigkeiten und schreiben:

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_\nu) = \frac{|\sum_r c_{hr}' c_{ir}|}{\| c_{ir} \| \; \| c_{ir}' \|} \quad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Für den Fall $\nu = n-1$ geht dieser Correlationsfactor in den von uns oben erklärten und angewendeten über.

Sind zwei Mannigfaltigkeiten verschiedener Ordnung $\mathfrak{M}_\nu$, $\mathfrak{M}_{\nu+\varrho}$ ($\varrho > 0$) vorgelegt, so projiciren wir $\mathfrak{M}_\nu$ auf $\mathfrak{M}_{\nu+\varrho}$ und erhalten dadurch $\mathfrak{M}_\nu'$, dann erklären wir:

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_{\nu+\varrho}) = \operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_\nu')$$

Sind $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ und $\mathfrak{M}_{n-\nu'}$ die zu $\mathfrak{M}_\nu$ bzhw. $\mathfrak{M}_\nu'$ normalen Mannigfaltigkeiten, so wird

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_{n-\nu}, \mathfrak{M}_{n-\nu'}) = \frac{|\sum_r \gamma_{kr} \gamma_{lr}'|}{\| \gamma_{kr} \| \cdot \| \gamma_{kr}' \|} \quad \begin{pmatrix} k, l = \nu+1, \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Bringt man die beiden Systeme

$$(c_{ir}) \quad \text{und} \quad (c_{ir}') \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

auf die kanonische Form, so sieht man ohne Mühe, dass

$$\operatorname{cor}(\mathfrak{M}_{n-\nu}, \mathfrak{M}_{n-\nu'}) = \operatorname{cor}(\mathfrak{M}_\nu, \mathfrak{M}_{\nu'}) \quad \text{ist.}$$

Der Correlationsfactor hat den Wert 0, wenn die Mannigfaltigkeiten normal sind, denn dann verschwindet jedes Element der Zählerdeterminante des Correlationsfactors. Das gilt aber nicht umgekehrt. Verschwindet nämlich der Correlationsfactor, so kann das Verschwinden von verschiedener Ordnung sein, wir bezeichnen in diesem Fall überhaupt die Mannigfaltigkeiten als orthogonal und bemessen die Stufe der Orthogonalität nach dem Range des Systems

$$\left(\sum_{r=1}^{n} c_{hr} c_{ir}'\right) \qquad (h, i = 1, 2 \ldots \nu)$$

Ist der Rang $= 0$, so tritt die höchste Stufe der Orthogonalität, die Normalität, ein.

Neben der Normalität ist von grosser Wichtigkeit die Parallelität. Parallel nennen wir zwei ν-fache Mannigfaltigkeiten, sobald die Coefficientensysteme ihrer in der kanonischen Form befindlichen Gleichungen einander gleich sind, ferner soll eine $\mathfrak{M}_\nu$ einer $\mathfrak{M}_{n+\varrho}$ ($\varrho > 0$) parallel heissen, wenn sie ihrer Projection auf dieselbe parallel ist.

Man sieht sofort, dass der Correlationsfactor zweier parallelen $\mathfrak{M}_\nu$ gleich 1 ist; umgekehrt zieht aber auch dieser Wert des Correlationsfactors die Parallelität der Mannigfaltigkeiten nach sich, wovon man sich durch Rechnung überzeugen kann.

§ 4.

Auf Grund der in den vorangehenden Paragraphen entwickelten Erklärungen und Beziehungen, gehen wir jetzt dazu über, einige geometrische Sätze, die sich mit harmonischen Punkten und Strahlen beschäftigen, auf die n-fache Mannigfaltigkeit zu erweitern. Es soll in zweifacher Richtung eine Verallgemeinerung versucht werden: in Bezug auf die Lage und in Bezug auf die Grössenverhältnisse. Dieser Paragraph soll die bekannte Construction des vierten harmonischen Punktes mit alleiniger Benutzung des Lineals erweitern. Wir können den in dieser Construction enthaltenen Satz so aussprechen:

Es sind gegeben 2 Punkte x_0, x_1 und auf ihrer Verbindungsgeraden ein dritter Punkt ξ. Dann nehmen wir ausserhalb der Geraden einen beliebigen Punkt ξ', verbinden ihn mit den 3 ersten und ziehen ferner durch den auf der Geraden (ξ, ξ') beliebig gewählten Punkt ξ'' die beiden Geraden (x_0, ξ''), (x_1, ξ''), welche die Geraden (x_1, ξ'), (x_0, ξ'), bzhw. treffen mögen in x_0' und x_1'. Nun ziehen wir (x_0', x_1'), welche (x_0, x_1), die ursprüglich gegebene Gerade, im Punkte Φ schneide. Dieser Punkt Φ ist unabhängig von der Lage der Punkte ξ', ξ'', vorausgesetzt allerdings, dass die Punkte ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden liegen.

Auf die Ebene verallgemeinert lautet dieser Satz:

Vier in einer Ebene gelegene Punkte x_0, x_1, x_2, ξ verbinden wir mit einem beliebigen Punkt ausserhalb der Ebene ξ' und ziehen von dem auf der Geraden (ξ, ξ') beliebig gewählten Punkte ξ'' die drei Geraden (x_0, ξ''), (x_1, ξ''), (x_2, ξ''), welche die drei Ebenen (x_1, x_2, ξ'), (x_2, x_0, ξ'), (x_0, x_1, ξ') bzhw. treffen mögen in den Punkten x_0', x_1', x_2'. Die Ebene (x_0', x_1', x_2') schneidet dann die

ursprünglich angenommene Ebene (x_0, x_1, x_2) in einer Geraden Φ, die unabhängig ist von der Lage der Punkte ξ', ξ'', sofern diese beiden nur mit ξ in einer Geraden liegen.

Diese Gerade stimmt überein mit der Harmonikale [1]) des Punktes ξ in Bezug auf das Dreieck x_0, x_1, x_2.

Schliesslich liefert die Erweiterung auf die n-fache Mannigfaltigkeit den Satz:

Es seien $x_0, x_1, \ldots x_n, \xi$ $n+2$ Punkte einer in einer $\mathfrak{M}_{n+1}$ befindlichen $\mathfrak{M}_n$, ξ', ξ'' zwei beliebige Punkte ausserhalb derselben jedoch mit der Massgabe, dass ξ, ξ', ξ' eine $\mathfrak{M}_1$ (Gerade) bilden; ferner seien $x_0' \ldots x_n'$ die Schnittpunkte der Geraden $(x_0, \xi''), \ldots (x_n, \xi'')$ bzhw. mit den $\mathfrak{M}_n$ $(x_1, x_2 \ldots x_n, \xi'), \ldots (x_0, x_1 \ldots x_{n-1}, \xi')$. Dann schneidet die $\mathfrak{M}_n$ $(x_0', x_1' \ldots x_n')$ die ursprünglich gegebene $\mathfrak{M}_n$ in einer $\mathfrak{M}_{n-1}$ Φ, die unabhängig von der Lage der Punkte ξ', ξ'' ist, wofern nur ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden liegen.

Φ nennen wir die Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid $(x_0, x_1 \ldots x_n)$.

Der Beweis dieses Satzes gestaltet sich folgendermassen:

Ein bebiebiger Punkt der $\mathfrak{M}_{n+1}$ sei bestimmt durch die Coordinaten x_{pk} $(k = 1, 2 \ldots n+1)$

die Punkte x_f $(f = 0, 1 \ldots n)$ durch $x_{f1}, \ldots x_{fn}, 0$

ξ durch $\ldots \xi_h \ldots, 0$ $(h = 1, 2 \ldots n)$

ξ', ξ'' bzhw. durch ξ_k', ξ_k'' $(k = 1, 2 \ldots n+1)$

ferner sei im Folgenden stets

$$x_{po} = x_{fo} = \xi_o = \xi_o' = \xi_o'' = 1$$

Die $\mathfrak{M}_n$, welche durch die Punkte $\ldots x_f', \ldots, \xi'$ $(f' = 0, 1 \ldots f-1, f+1 \ldots n)$ geht, hat dann die Gleichung:

$$| x_{pk}, x_{ok}, \ldots x_{f-1,k}, \xi_k', x_{f+1,k} \ldots x_{nk} | = 0$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1, \quad x_{gn+1} = 0, \quad g = 0, 1 \ldots n)$$

die $\mathfrak{M}_1$, welche durch die Punkte x_f, ξ'' geht, wird dargestellt durch

$$x_{pk} = x_{fk} + (\xi_k'' - x_{fk}) t_f \quad (k = 1, 2 \ldots n+1)$$

---

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Leipzig 1887. I. S. 105.

Da der Punkt x_f' auf dieser liegt, so giebt es einen Wert τ_f von t_f, welcher die Gleichungen

$$x_{fk}' = x_{fk} + (\xi_k'' - x_{fk})\tau_f$$

befriedigt; dieser Wert bestimmt sich dadurch, dass in der vorher angegebenen Gleichung der $\mathfrak{M}_n$ x_{pk} durch x_{fk}' ersetzt wird, denn x_{fk}' liegt ja auf dieser $\mathfrak{M}_n$. Darnach wird:

$$| x_{fk}(1-\tau_f) + \xi_k''\tau_f,\ x_{0k}, \ldots x_{f-1,k},\ \xi_k',\ x_{f+1,k} \ldots x_{nk} | = 0$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{| \xi_k'\ x_{0k} \ldots x_{f-1,k},\ x_{fk},\ x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}{| \xi_k',\ x_{0k} \ldots x_{f-1,k},\ \xi_k'',\ x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Nun liegen aber die Punkte ξ, ξ', ξ'' in einer Geraden, also giebt es einen Wert τ, der den Gleichungen

$$\xi_k'' = \xi_k + (\xi_k' - \xi_k)\tau$$

genügt. Mit Hilfe hiervon ergiebt sich:

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{| \xi_k',\ x_{0k} \ldots x_{nk} |}{| \xi_k',\ x_{0k} \ldots x_{f-1,k},\ \xi_k(1-\tau) + \xi_k'\tau,\ x_{f+1,k} \ldots x_{nk} |}$$
$$(k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\xi_{n+1} = x_{gn+1} = 0 \quad (g = 0, 1 \ldots n)$$

so kommt:

$$\frac{\tau_f}{1-\tau_f} = -\frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{| x_{gh} |}{| x_{0h} \ldots x_{f-1,h},\ \xi_h,\ x_{f+1,h} \ldots x_{nh} |}$$
$$(g, h = 0, 1 \ldots n)$$

Mit Hilfe hiervon ist es leicht, die Gleichung derjenigen $\mathfrak{M}_n$ aufzustellen, welche durch die Punkte x_f' $(f = 0, 1 \ldots n)$ geht. Diese ist nämlich:

$$| x_{pk},\ x_{0k}', \ldots x_{nk}' | = 0 \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots n+1)$$

oder:

$$| x_{pk}, \ldots, x_{fk}(1-\tau_f) + \xi_k''\tau_f \ldots | = 0 \quad (k = 0, 1 \ldots n+1)$$

Da es nun aber nur auf die Schnitt-$\mathfrak{M}_{n-1}$ dieser $\mathfrak{M}_n$ mit der Grund-$\mathfrak{M}_n$ $x_{pn+1} = 0$ ankommt, so können wir $x_{pn+1} = 0$ setzen und erhalten als Gleichung der $\mathfrak{M}_{n-1}$ Φ

$$\begin{vmatrix} x_{ph}, \ldots x_{fh}(1-\tau_f)+\xi_h''\tau_f \ldots \\ 0, \ldots \quad \xi_{n+1}''\tau_f \quad \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

oder

$$\xi_{n+1}'' \prod_f (1-\tau_f) \begin{vmatrix} x_{ph} \ldots x_{fh} \ldots \\ \\ 0 \ldots \frac{\tau_f}{1-\tau_f} \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad (f, h = 0, 1 \ldots n)$$

also mit Benutzung des oben für $\frac{\tau_f}{1-\tau_f}$ gefundenen Wertes:

$$\frac{|\, x_{gh} \,|\, \xi_{n+1}''}{1-\tau} \prod_f (1-\tau_f) \begin{vmatrix} x_{ph} \ldots, x_{fh}, \ldots \\ \\ 0, \ldots, \frac{1}{\Delta_f} \ldots \end{vmatrix} = 0$$

$$(g, f, h = 0, 1 \ldots n)$$

wobei

$$\Delta_f = |\, x_{0h}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh} \,| \text{ ist.}$$

Da $\tau \gtrless 1$, weil sonst ξ', ξ'' zusammenfallen würden, $\xi_{n+1} \gtrless 0$, weil sonst ξ'' nicht ausserhalb der ursprünglich angenommenen $\mathfrak{M}_n$ liegen würde und schliesslich $|\, x_{gh} \,| \gtrless 0$ $(g, h = 0, 1 \ldots n)$ ist, weil sonst die Punkte x_f $(f = 0, 1 \ldots n)$ in einer niederen als n-fachen Mannigfaltigkeit liegen würden, erhalten wir endlich als die Gleichung der Harmonikale des Punktes ξ_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ in Bezug auf das Prismatoid (x_{fh}) $\begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$

$$\Phi = \begin{vmatrix} x_{ph}, \ldots x_{fh} \ldots \\ \\ 0, \ldots \frac{1}{\Delta_f} \ldots \end{vmatrix} = 0 \qquad (f, h = 0, 1 \ldots n)$$

Diese Gleichung nimmt eine sehr einfache Gestalt an, sobald man statt der orthogonalen Coordinaten x_{ph} $(h = 1, 2 \ldots n)$ eines Punktes die homogenen Coordinaten (vergl. § 1.)

$$u_{pk} = \sum_h x_{ph} \frac{D_{hk}}{D} \qquad (h, k = 0, 1 \ldots n)$$

einführt. Dabei ist D die Determinante des Systems

$$(x_{gh}) \qquad (g, h = 0, 1 \ldots n)$$

und D_{hg} die zum Element x_{gh} gehörige Subdeterminante.

Es gelten dann die Gleichungen:

$$x_{pg} = \sum_k x_{kg} u_{pk} \qquad (g,\ k = 0,\ 1 \ldots n)$$

die für $g = 0$ die Relation

$$\sum_{k=o}^{n} u_{pk} = 1$$

enthalten. Nun seien

$$\varphi_k \qquad (k = 0,\ 1 \ldots n)$$

die homogenen Coordinaten des Punktes ξ, dann ist

$$\xi_g = \sum_k x_{kg} \varphi_k \qquad (g,\ k = 0,\ 1 \ldots n)$$

Mit Hilfe dieser Einführung ergiebt sich:

$$\Delta_f = | x_{0k}, \ldots x_{f-1,k}, \sum_g x_{gk} \varphi_g, x_{f+1,k}, \ldots x_{nk} |$$

$$(f,\ g,\ k = 0,\ 1 \ldots n)$$

$$= \varphi_f | x_{gk} |$$

Ferner

$$\Phi = \begin{vmatrix} \sum_k x_{kh} u_{pk}, \ldots x_{fh} \ldots \\ \\ 0, \ \ldots \frac{1}{\varphi_f | x_{gk} |} \ldots \end{vmatrix} \qquad (f, g, h, k = 0, 1 \ldots n)$$

$$= \begin{vmatrix} 0, \ \ldots \ x_{fh} \ \ldots \\ \\ -\sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k | x_{gh} |}, \ \ldots \frac{1}{\varphi_f | x_{gh} |} \ldots \end{vmatrix} = -\sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k}$$

Mithin ist

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{pk}}{\varphi_k} = 0$$

die Gleichung der Harmonikale des durch die homogenen Coordinaten φ_k ausgedrückten Punktes in Bezug auf das Prismatoid, auf welches sich die homogenen Coordinaten beziehen. u_{pk} sind die homogenen Coordinaten irgend eines Punktes der Harmonikale [1]).

Diese Form der Gleichung ist besonders geeignet zur Herleitung einiger Eigenschaften der Harmonikale. Um diese zu entwickeln stellen wir zuerst den verallgemeinerten Begriff der centralen Projection auf. Wir erklären:

Eine in einer $\mathfrak{M}_r$ befindliche $\mathfrak{M}_\mu'$ $(\mu < \nu)$ heisst die Projection einer $\mathfrak{M}_\mu$ auf die $\mathfrak{M}_r$ von einer $\mathfrak{M}_{n-r-1}$ aus, sobald $\mathfrak{M}_\mu'$ als Schnitt der

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Leipzig 1887. I S. 115.

$\mathfrak{M}_\nu$ mit einer durch $\mathfrak{M}_\mu$ und $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ gelegten $\mathfrak{M}_{n-\nu-\mu}$ betrachtet werden kann; die $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ soll das Projectionscentrum heissen.

Auf diese Erklärung gestützt, beweisen wir folgenden Satz:

Die $\mathfrak{M}_{\nu-1}$, in welcher die Harmonikale Φ die Grenz-$\mathfrak{M}_\nu$ des Prismatoides, die die Punkte $x_0 \ldots x_\nu$ bilden, schneidet, ist in Bezug auf das Prismatoid dieser Punkte die Harmonikale desjenigen Punktes η der $\mathfrak{M}_\nu$, welcher durch Projection von ξ von der $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, die die Punkte $x_{\nu+1} \ldots x_n$ bestimmen, aus entsteht.

Wir tun der Allgemeinheit keinen Abbruch, wenn wir annehmen, die $\mathfrak{M}_\nu$ sei zugleich die Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1, \ldots n)$$

Dann ist also

$$x_{fi} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ i = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

und

$$\eta_i = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

sobald η_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ die Coordinaten des Punktes η sind.

Es seien ferner v_{pf} $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes (x_{pg}') $(g = 1, 2 \ldots \nu)$ bezogen auf das Prismatoid der Punkte $x_0, \ldots x_\nu$; η habe die homogenen Coordinaten ψ_f $(f = 0, 1 \ldots \nu)$.

Wir wollen dann v_{pf} ausdrücken durch u_{ph} $(h = 0, 1 \ldots n)$, wenn v_{pf} die Projection des durch die Grössen u_{ph} bestimmten Punktes darstellt. Da x_p', x_p, x_i $(i = \nu+1 \ldots n)$ auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen sollen, was ja aus der Erklärung der Projection folgt, so giebt es ein Wertsystem t_k $(k = \nu+1 \ldots n)$, welches die Gleichungen

$$x_{ph}' - x_{ph} = \sum_h (x_{kh} - x_{ph}) t_k \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots n \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Hieraus folgt:

$$\begin{vmatrix} x_{pf}' - x_{pf} \ldots x_{kf} - x_{pf} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} - x_{pi} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} (i, k = \nu+1 \ldots n) \\ (f = 1, 2 \ldots \nu) \end{matrix}$$

also

$$v_{pf}' \begin{vmatrix} 1 \ldots 1 \\ \ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{pf} \ldots x_{kf} \\ \ldots\ldots \\ x_{pi} \ldots x_{ki} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i, k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

oder

$$x_{pf'}\begin{vmatrix} \sum_g u_{pg}, & \ldots & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_g x_{gi}\,u_{pg}, & \ldots & x_{ki} & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_g x_{gf}\,u_{pg}, & \ldots & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_g x_{gi}\,u_{pg}, & \ldots & x_{ki} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1,\ 2 \ldots \nu \\ g = 0,\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Mit Rücksicht auf

$$x_{fi} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0,\ 1 \ldots \nu \\ i = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

werden diese Gleichungen zu

$$x_{pf'} \sum_g u_{pg} \mid x_{ki} \mid = \sum_g x_{gf}\,u_{pg} \mid x_{ki} \mid$$

$$\begin{pmatrix} i,\ k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1,\ 2 \ldots \nu \\ g = 0,\ 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

und schliesslich zu

$$x_{pf'} = \frac{\sum_g x_{gf}\,u_{pg}}{\sum_g u_{pg}} \qquad \begin{pmatrix} f = 1,\ 2 \ldots \nu \\ g = 0,\ 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

hierin kann f auch den Wert 0 annehmen. Nun ist aber auch

$$x_{pf'} = \sum_g x_{gf}\,v_{pg} \qquad (g,\ f = 0, \ldots \nu)$$

sodass sich ergiebt:

$$v_{pg} = \frac{u_{pg}}{\sum_f u_{pf}} \qquad (f,\ g = 0,\ 1 \ldots \nu)$$

also ist im besonderen

$$\psi_g = \frac{\varphi_g}{\sum_f \varphi_f} \qquad (f,\ g = 0,\ 1 \ldots \nu)$$

Die $\mathfrak{M}_{n-1}$, die durch den Schnitt von Φ mit der $\mathfrak{M}_r$ entsteht, wird darnach bestimmt durch das Gleichungssystem

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

$$\Phi = \sum_k \frac{u_{pk}}{\varphi_k} = 0 \qquad (k = 0,\ 1 \ldots n)$$

das durch

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

$$\sum_g \frac{u_{pg}}{\varphi_g} = 0 \qquad (g = 0, 1 \ldots \nu)$$

ersetzt werden kann. Führen wir hierin

$$u_{pg} = v_{pg} \sum_f u_{pf}, \quad \varphi_g = \psi_g \sum_f \varphi_f \qquad (f, g = 0, 1 \ldots n)$$

so wird die $\mathfrak{P}_{\nu-1}$ innerhalb der $\mathfrak{M}_\nu$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\psi = \sum_f \frac{v_{pf}}{\psi_f} = 0 \qquad (f = 0, 1 \ldots \nu)$$

d. h aber die $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ ψ ist die Harmonikale des Punktes η in Bezug auf das durch die Punkte $x_0, \ldots x_\nu$ gebildete Prismatoid.

Wir beweisen ferner diesen Satz:

Ist in einer $\mathfrak{M}_\nu$ eine $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ ψ Harmonikale eines Punktes η in Bezug auf ein Prismatoid $x_0, \ldots x_\nu$, so bleibt diese Beziehung erhalten, sobald man $\mathfrak{M}_\nu$ von einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ aus auf $\mathfrak{M}_\nu'$ projicirt.

Das Projectionscentrum, die $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, sei gegeben durch die Punkte x_k $(k = \nu+1 \ldots n)$, ferner mögen ψ', η', x_f' $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ die Projectionen von bzhw. ψ, η, x_f sein. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir $\mathfrak{M}_\nu$ als Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk} = 0 \qquad (k = \nu+1 \ldots n)$$

wählen, ferner können wir, was aus dem Vorhergehenden einleuchtet, η auffassen als Projection eines Punktes ξ der $\mathfrak{M}_n$, dessen Harmonikale Φ in Bezug auf das Prismatoid $\ldots, x_f \ldots (f = 0, 1 \ldots n)$ die $\mathfrak{M}_\nu$ in ψ schneidet, dann ist also η' die Projection von ξ auf $\mathfrak{M}_\nu'$. Es sei nun x_{ph} $(h = 1, 2 \ldots n)$ irgend ein Punkt der $\mathfrak{M}_n$, x_{pf}' $(f = 1, 2 \ldots \nu)$ seine Projection auf $\mathfrak{M}_\nu'$, dann ergiebt sich:

$$x_{pf}' \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{pi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{pf} & \ldots & x_{kf} \\ x_{pi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k,\ i = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

Mithin folgt durch Specialisation des beliebigen Punktes:

$$x_{gf}' \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{gf} & \ldots & x_{kf} \\ x_{gi} & \ldots & x_{ki} \end{vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i,\ k = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \\ g = 0, 1 \ldots \nu \end{bmatrix}$$

Bezeichnet jetzt u_{ph} $(h = 0, 1 \ldots n)$ die homogenen Coordinaten des Punktes x_p bezogen auf das Prismatoid $\ldots x_f, \ldots (f = 0, 1 \ldots n)$, v_{pg}' $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ dieselben Coordinaten des Punktes x_p' bezogen auf das Prismatoid $\ldots x_f' \ldots (f = 0, 1 \ldots \nu)$, so folgt aus der obigen Gleichung:

$$x_{pf}' \begin{vmatrix} \sum_h u_{ph} \ . \ . \ . ; & 1 \\ \sum_h x_{hi} u_{ph} \ . \ . \ . & x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_h x_{hf} u_{ph}, \ . \ . \ . & x_{kf} \\ \sum_h x_{hi} u_{ph}, \ . \ . \ . & x_{ki} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i, \ k = \nu+1 \ . \ . \ . \ n \\ h = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ n \end{pmatrix}$$

$$x_{pf}' \begin{vmatrix} \sum_g u_{pg}, & . \ . \ . \ 1 \\ \sum_g x_{gi} u_{pg} & . \ . \ . \ x_{ki} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_g x_{gf} u_{pg}, \ . \ . \ . & x_{pf} \\ \sum_g x_{gi} u_{pg}, \ . \ . \ . & x_{ki} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i, \ k = \nu+1 \ . \ . \ . \ n \\ g = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu \end{pmatrix}$$

$$x_{pf}' \sum_g u_{pg} \begin{vmatrix} 1 & . \ . \ . \ 1 \\ x_{gi} & . \ . \ . \ x_{ki} \end{vmatrix} = \sum_g u_{pg} \begin{vmatrix} x_{gf} \ . \ . \ . & x_{kf} \\ x_{gi} \ . \ . \ . & x_{ki} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i, \ k = \nu+1 \ . \ . \ . \ n \\ g = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu \end{pmatrix}$$

$$= \sum_g u_{pg} x_{gf}' \begin{vmatrix} 1 & . \ . \ . \ 1 \\ x_{gi} & . \ . \ . \ x_{ki} \end{vmatrix}$$

und hieraus in Verbindung mit

$$x_{pf}' = \sum_g x_{gf}' v_{pg}'$$

kommt:

$$v_{pf}' = \frac{u_{pf} \begin{vmatrix} 1 & . \ . \ . \ 1 \\ x_{fi} & . \ . \ . \ x_{ki} \end{vmatrix}}{\sum_g u_{pg} \begin{vmatrix} 1 & . \ . \ . \ 1 \\ x_{gi} & . \ . \ . \ x_{ki} \end{vmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} f, \ g = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu \\ i, \ k = \nu+1 \ . \ . \ . \ n \end{pmatrix}$$

also auch

$$\psi_f' = \frac{\varphi_f \begin{vmatrix} 1 & . \ . \ . \ 1 \\ x_{fi} & . \ . \ . \ x_{ki} \end{vmatrix}}{\sum_g \varphi_g \begin{vmatrix} 1 & . \ . \ . \ 1 \\ x_{gi} & . \ . \ . \ x_{ki} \end{vmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} f, \ g = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu \\ i, \ k = \nu+1 \ . \ . \ . \ a \end{pmatrix}$$

wenn φ_f bzhw. ψ_f' die homogenen Coordinaten der Punkte ξ, η' sind.

Es seien ferner u_f $(f = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu)$ die homogenen Coordinaten irgend eines Punktes der $\mathfrak{M}_r$ bezogen auf das Prismatoid $. \ . \ . \ x_f \ . \ . \ . \ (f = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu)$, ψ_f die speciellen des Punktes η, dann wird ψ bestimmt durch die Gleichung:

$$\sum_{f=0}^{\nu} \frac{u_{pf}}{\psi_f} = 0$$

wie in der Voraussetzung enthalten ist. Da wir nun ψ als Schnitt von Φ und $\mathfrak{M}_\nu$ auffassen wollen, so können wir diese Gleichung ersetzen durch

$$u_{pi} = 0 \qquad (i = \nu+1 \ldots n)$$

$$\sum_f \frac{u_{pf}}{\varphi_f} = 0 \qquad (f = 0, 1 \ldots \nu)$$

daraus ergiebt sich aber, dass ψ' bestimmt ist durch

$$\sum_f \frac{v_{pf'}}{\psi_{pf'}} \cdot \frac{\sum_g u_{pg} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{gi} & x_{ki} \end{vmatrix}}{\sum_g \psi_g \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{gi} & x_i \end{vmatrix}} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\psi' = \sum_{f=0}^{\nu} \frac{v_{pf'}}{\psi_{f'}} = 0$$

d. h. aber ψ' ist Harmonikale des Punktes η' in Bezug auf das Prismatoid $\ldots x_{f'} \ldots (f = 0, 1 \ldots \nu)$. Das war zu beweisen.

Die Harmonikale Φ des Punktes ξ (es gelten die alten Bezeichnungen) schneidet die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$, welche durch die Punkte η, $x_{\nu+1} \ldots x_n$ bestimmt ist, in einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$. Man könnte nun vermuten — und diese Vermutung ist besonders leicht möglich nach Kenntniss einiger Ergebnisse, deren Ableitung der nächste Paragraph gewidmet sein soll —, dass diese $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, die wir abkürzungsweise X nennen wollen, Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das von den Punkten η, $x_{\nu+1} \ldots x_n$ gebildete Prismatoid ist. Das ist aber keineswegs der Fall; weil aber die Bestimmungsgleichung von X grosse Aehnlichkeit mit der Gleichung der erwähnten Harmonikale besitzt, soll sie hier abgeleitet werden.

Wir wählen wieder, der Einfachheit wegen, die $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ zur Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pf} = 0 \qquad (f = 1 \ldots \nu)$$

Darnach ist

$$x_{kf} = \xi_f = \eta_f = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 1 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

zu setzen. Ferner muss berücksichtigt werden, dass die Punkte η, $x_0, \ldots x_\nu$ in einer $\mathfrak{M}_\nu$ liegen, demnach giebt es ein Wertsystem τ_f, welches die Gleichungen:

$$x_{oh} - \eta_h = \sum_f (x_{fh} - \eta_h)\,\tau_f \qquad \begin{pmatrix} f = 1, 2 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Es seien weiter $\chi_\nu, \chi_{\nu+1} \ldots \chi_n$ die homogenen Coordinaten des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid: $\eta, x_{\nu+1} \ldots x_n$, sodass also

$$\chi_\nu = \frac{|\, \xi_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,|}{|\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,|}$$

$$\chi_k = \frac{|\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{k-1,i},\ \xi_i,\ x_{k+1,i} \ldots x_{ni}\,|}{|\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,|}$$

$$(i = 0,\ \nu+1 \ldots n,\quad k = \nu+1 \ldots n$$

ist.

Mit Benutzung alles des eben angeführten ergeben sich die in der Gleichung von Φ vorkommenden Grössen Δ folgendermassen:

$$\Delta_o = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1, & 1 & \ldots 1 \\ 0 & x_{1g} \ldots x_{\nu g} & 0 & \ldots 0 \\ \xi_k, & x_{1k} \ldots x_{\nu k}, & x_{\nu+1k} & \ldots x_{nk} \end{vmatrix}$$

$$= |\, x_{fg}\,| \begin{vmatrix} 1, & 1 & \ldots 1 \\ \xi_k, & x_{\nu+1k} & \ldots x_{nk} \end{vmatrix} = |\, x_{fg}\,|\, |\, \eta_i,\ x_{\nu+1i} \ldots x_{ni}\,|\ \chi_\nu = \Delta\chi_\nu$$

$$(f, g = 1, 2 \ldots \nu;\quad k = \nu+1 \ldots n;\quad i = 0, \nu+1 \ldots n)$$

wobei die Bedeutung von Δ klar ist.

$$\Delta_f = \begin{vmatrix} 1 & \ldots 1, & 1, & 1 & \ldots 1, & 1 & \ldots 1 \\ x_{og} & \ldots x_{f-1,g}, & 0, & x_{f+1,g} & \ldots x_{\nu g}, & 0 & \ldots 0 \\ x_{ok} & \ldots x_{f-1,k}, & \xi_k, & x_{f+1,k} & \ldots x_{\nu k}, & x_{\nu+1,k} & \ldots x_{nk} \end{vmatrix}$$

$$(f < \nu+1) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Setzt man für $x_{\nu k}$ den in der Vorbemerkung angegebenen Ausdruck und formt die Determinante etwas um, so erhält man:

$$\Delta_f = -\tau_f\, |\, x_{fg}\,|\ |\, \xi_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{ni}\,| = -\tau_f \Delta\chi_\nu$$

$$(f = 1, 2 \ldots \nu)$$

Weiter

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & \ldots 1, & 1 & \ldots 1, & 1, & 1 & \ldots 1 \\ x_{og} & \ldots x_{\nu g}, & 0 & \ldots 0, & 0, & 0 & \ldots 0 \\ x_{ok} & \ldots x_{\nu k}, & x_{\nu+1,k} & \ldots x_{r-1,k}, & \xi_k, & x_{r+1,k} & \ldots x_{nk} \end{vmatrix}$$

$$(r > \nu) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

Wird hierin wieder x_{ok} fortgeschafft, so kommt nach einigen Umformungen:

$$\Delta_r = (1 - \sum_f \tau_f)\, |\, x_{fg}\,|\ |\, \eta_i,\ x_{\nu+1,i} \ldots x_{r-1i},\ \xi_i,\ x_{r+1,i} \ldots x_{ni}\,|$$

$$= (1 - \sum_f \tau_f)\, \Delta\chi_r \qquad \begin{pmatrix} r = \nu+1 \ldots n \\ f = 1, 2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

Nun hatte Φ die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_{ph}, & x_{oh} & \dots & x_{nh} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \frac{1}{\Delta_o} & \dots & \frac{1}{\Delta_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (h = 0, 1 \dots n)$$

setzen wir hierin

$$x_{pf} = 0 \qquad (f = 1, 2 \dots \nu)$$

und entfernen zugleich x_{oh}, so geht die Gleichung über in die Bestimmungsgleichung von χ:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1 - \sum_f \tau_f, & \dots 1 \dots & 1 \dots \\ 0, & 0, & \dots x_{fg} \dots & 0 \dots \\ x_{pk}, & (1 - \sum_f \tau_f)\eta_k & \dots x_{fk} \dots & x_{rk} \dots \\ 0, & \frac{1}{\Delta_o} - \sum_f \frac{\tau_f}{\Delta_f} & \dots \frac{1}{\Delta_f} \dots & \frac{1}{\Delta_r} \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$(f, g = 1, 2 \dots \nu; \quad k, r = \nu + 1 \dots n)$$

oder:

$$|x_{fg}| \begin{vmatrix} 1. & 1 - \sum_f \tau_f & \dots 1 \dots \\ x_{pk}, & (1 - \sum_f \tau_f)\eta_k & \dots x_{rk} \dots \\ 0, & \frac{1}{\Delta_o} - \sum_f \frac{\tau_f}{\Delta_f} & \dots \frac{1}{\Delta_r} \dots \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Benutzung der für die Δ gefundenen Werte:

$$\frac{|x_{fg}|}{\Delta} \begin{vmatrix} 1, & 1 & \dots 1 \dots \\ x_{pk}, & \eta_k & \dots x_{rk} \dots \\ 0, & \frac{\nu+1}{\chi_\nu} & \dots \frac{1}{\chi_\nu} \dots \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir die homogenen Coordinaten des Punktes x_{ph} mit $w_\nu \dots w_n$, — für den Punkt ξ heissen sie $\chi_\nu \dots \chi_n$, — dann ist

$$x_{pk} = \eta_k w_k + \sum_r x_{rk} w_r \qquad (r, k = \nu + 1 \dots n)$$

zu setzen, und wird obige Gleichung zu

$$\chi = (\nu + 1) \frac{w_\nu}{\chi_\nu} + \sum_k \frac{w_k}{\chi_k} = 0 \quad (k = \nu + 1 \dots n)$$

Das ist die gesuchte Gleichung von χ, man sieht sofort ihre Aehnlichkeit mit der Gleichung der Harmonikale des Punktes ξ in Bezug auf das Prismatoid $\eta, \ldots x_\nu \ldots$, denn deren Gleichung ist ja, gemäss dem Früheren:

$$\frac{w_\nu}{\chi_\nu} + \sum_k \frac{w_k}{\chi_k} = 0 \qquad (k = \nu + 1 \ldots n)$$

Die Sätze, die den Gegenstand dieses Paragraphen gebildet haben, lassen sich nun auch ohne Schwierigkeit auf die sphärische Mannigfaltigkeit (vgl. § 2.) ausdehnen. An die Stelle einer ebenen ν-fachen Mannigfaltigkeit ($\mathfrak{M}_\nu$) ist dann nur diejenige krumme (M_ν) zu setzen, welche sich als Schnitt der sphärischen und einer ebenen $\nu+1$-fachen Mannigfaltigkeit ergiebt. Da die Betrachtung sachlich sich an das Obige eng anlehnt, so übergehen wir sie hier.

Ehe wir uns nun im andern Paragraphen zu der zweiten Verallgemeinerung harmonischer Punkte in einer Geraden wenden, wollen wir über die oben erklärte und angewandte Art der Projection, von der wir auch fernerhin Gebrauch machen werden, noch einige Worte sagen. Für die Ebene liefert unsre Erklärung als alleinige Möglichkeit die Projection von einem Punkt aus durch Gerade auf eine Gerade; für den Raum erweisen sich aber zwei Fälle als möglich, nämlich die Projection von einem Punkt aus durch Gerade auf eine Ebene und die Projection von einer Geraden aus durch Ebenen auf eine Gerade.

§ 5.

Wir schreiten jetzt zu der andern Verallgemeinerung der harmonischen Punkte einer Geraden.

Sind in einer Geraden drei Punkte x_0, x_1, ξ gegeben, so bezeichnet man die Strecken $x_0\xi_1$ und ξx_1 als Teile der Strecke x_0x_1. Entsprechend erklären wir in der Ebene als Teile eines Dreiecks $x_0x_1x_2$ die 3 Dreiecke, welche ein fernerer Punkt ξ mit je zweien der drei Punkte x_0, x_1, x_2 bildet, und in der n-fachen Mannigfaltigkeit sollen die Prismatoide, deren Eckpunkte

$$x_0, \ldots x_{f-1}, \xi, x_{f+1}, \ldots x_n \qquad (f = 0, 1 \ldots n)$$

sind, als Teile des Prismatoids $x_\nu, \ldots x_n$ bezeichnet werden.

Die Berechtigung dieser Bezeichnung liegt, wie bei der Geraden, darin, dass die Summe der Inhalte der Teilprismatoide, jeder allerdings mit einem bestimmten Vorzeichen versehen, dem Inhalt des Grundprismatoids gleich ist.

Sind nämlich die Coordinaten

$$\begin{array}{lll} \text{von } x_f & x_{fh} & (h = 1, 2 \ldots n) \\ \text{und von } \xi & \xi_h & (h = 1, 2 \ldots n) \end{array}$$

so ist der $n!$-fache Inhalt des Prismatoides $x_0, \ldots x_{f-1}, \xi, x_{f+1}, \ldots x_n$:

$$V_f = \| x_{0h}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh} \| \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

setzen wir

$$\operatorname{sgn} | x_{0h}, \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h} \ldots x_{nh} | = \varepsilon_f$$

so kommt:

$$| x_{0h} \ldots x_{f-1,h}, \xi_h, x_{f+1,h}, \ldots x_{nh} | = \varepsilon_f V_f \quad (h = 0, 1 \ldots n)$$

oder

$$\sum_h \xi_h D_{hf} = \varepsilon_f V_f$$

Daraus folgt

$$\sum_f \varepsilon_f V_f = \sum_{f,h} \xi_h D_{hf} = \sum_{f,h} \xi_h D_{hf} x_{f0} = \sum_h \xi_h \delta_{h0} D = D$$

$$(f, h = 0, 1 \ldots n)$$

Nun ist

$$D \operatorname{sgn} D = V$$

dem $n!$-fachen Inhalt des Prismatoides $x_0 \ldots x_n$, also kommt,

$$\operatorname{sgn} D = \varepsilon \quad \text{gesetzt}$$

$$\sum \varepsilon_f V_f = \varepsilon V \qquad (f = 0, 1 \ldots n)$$

woraus die Berechtigung der Bezeichnung „Teilprismatoid“ erhellt.

Man sagt: Eine Strecke $x_0 x_1$ wird von zwei Punkten ξ, ξ' harmonisch geteilt, sobald die Strecken $x_0 \xi$ und ξx_1 dasselbe Verhältniss haben, wie die Strecken $x_0 \xi'$ und $\xi' x_1$. Entsprechend erklären wir in der n-fachen Mannigfaltigkeit:

Die Punkte ξ, ξ', ξ'' . . . teilen das Prismatoid $x_0, \ldots x_n$ harmonisch, sobald

$$V_0 : V_1 : \ldots : V_n = V_0' : V_1' ; \ldots : V_n' = V_0'' : V_1'' : \ldots : V_n'' = \ldots$$

ist; dabei haben V_f', V_f'' dieselbe Bedeutung für ξ', ξ'' bezüglich, wie V_f für ξ. Wir wollen die Punkte ξ, ξ', ξ'' . . . harmonisch in Bezug auf das Prismatoid nennen.

Wir stellen uns nun zuvörderst die Aufgabe:

Es sollen sämtliche Punkte bestimmt werden, welche ein gegebenes Prismatoid nach dem Verhältniss $m_0 : m_1 \ . \ . \ . : m_n$ teilen.

Einer von diesen Teilpunkten sei ξ, so muss also bei Beibehaltung obiger Bezeichnung sein,

$$V_0 : V_1 : \ . \ . \ . : V_n = m_0 : \ . \ . \ . : m_n$$

Diese Proportion lässt sich durch das Gleichungssystem

$$V_f = D \lambda m_f \qquad (f = 0, 1 \ . \ . \ . \ n)$$

wobei λ ein Proportionalitätsfactor ist, ersetzen.

Daraus folgt

$$| x_{0h}, \ . \ . \ . \ x_{f-1,h}, \ \xi_h, \ x_{f+1}, \ . \ . \ . \ x_{nh} | = \lambda \varepsilon_f m_f | x_{gh} |$$
$$(f, \ g, \ h = 0, 1 \ . \ . \ . \ n)$$

oder

$$\sum_h \xi_h D_{hf} = \varepsilon_f m_f D \lambda$$

daraus

$$\sum_{h,f} \xi_h D_{hf} x_{fk} = \sum_f \varepsilon_f m_f D \lambda x_{fk} \qquad (f, \ h, \ k = 0, 1 \ . \ . \ . \ n)$$

$$\sum_h \xi_h \delta_{hk} D = D \lambda \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk}$$

$$\xi_k = \lambda \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \qquad (f, \ k = 0, 1 \ . \ . \ . \ n)$$

also kommt, da

$$\xi_0 = \lambda \sum_f \varepsilon_f m_f = 1 \quad \text{ist,}$$

$$\xi_h = \frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ . \ . \ . \ n \\ h = 1, 2 \ . \ . \ . \ n \end{pmatrix}$$

Auf diese Art sind die Coordinaten jedes Punktes bestimmt, welcher das Prismatoid in dem gegebenen Verhältniss teilt.

Da die Grössen $\varepsilon_f (f = 0, 1 \ . \ . \ . \ n)$ den Wert ± 1 annehmen können, und es im ganzen 2^{n+1} solcher Zeichencombinationen giebt, so erhält man ebensoviel Werte von ξ_h, die aber nicht alle von einander verschieden sind. Es fragt sich nun, wieviel Punkte ξ sich aus obiger Gleichung ergeben. Es werde ξ bestimmt durch $\varepsilon_f (f = 0, 1 \ . \ . \ . \ n)$, ξ' durch $\varepsilon_f' (f = 0, 1 \ . \ . \ . \ n)$, so erfordert die Uebereinstimmung von ξ mit ξ' das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} = \frac{\sum_f \varepsilon_f' m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f' m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ . \ . \ . \ n \\ h = 1, 2 \ . \ . \ . \ n \end{pmatrix}$$

Hierin kann h auch den Wert 0 annehmen. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\sum_f x_{fh}\left\{\frac{\varepsilon_f}{\sum_f \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_f'}{\sum_f \varepsilon_f' m_f}\right\} m_f = 0 \quad (f,\ h = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

$$\sum_{f,h} m_f x_{fh} D_{hk}\left\{\frac{\varepsilon_f}{\sum_f \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_f'}{\sum_f \varepsilon_f' m_f}\right\} = 0 \qquad (f,\ h,\ k = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

daraus

$$m_k\left\{\frac{\varepsilon_k}{\sum_f \varepsilon_f m_f} - \frac{\varepsilon_k'}{\sum_f \varepsilon_f' m_f}\right\} = 0 \qquad (k,\ f = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n)$$

also kommt

$$\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_o} = \frac{\varepsilon_h'}{\varepsilon_o'} \qquad (h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Nun können aber ε_o und ε_o' stets gleich 1 angenommen werden, wie man aus dem Wert von ξ_h ohneweiters sieht, sodass folgt

$$\varepsilon_h = \varepsilon_h' \qquad (h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

d. h. es giebt soviel Punkte ξ als es Zeichencombinationen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ giebt, nämlich 2^n. Wir haben also den Satz:

Es giebt im ganzen 2^n Punkte, welche ein gegebenes Prismatoid in n Teile von gegebenem Verhältniss teilen. Ihre Coordinaten sind dargestellt durch

$$\xi_k = \frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0,\ 1\ .\ .\ .\ n \\ h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Man überzeugt sich auch sofort von der Richtigkeit der Umkehrung, dass ein Punkt, welcher derartige Coordinaten hat, das Prismatoid nach dem Verhältniss $m_0 : m_1 : \ .\ .\ .\ : m_n$ teilt.

In der $\mathfrak{M}_n$ sei nun ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung gegeben durch die Punkte x_f $(f = 0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu)$ mit den Coordinaten $x_{fh}\begin{pmatrix} f = 0,\ 1\ .\ .\ .\ \nu \\ h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$. Welches sind die Coordinaten ξ_h eines Punktes ξ, welcher das Prismatoid im Verhältniss $m_0 : m_1 : \ .\ .\ .\ : m_r$ teilt?

Wir verlegen das Axensystem so, dass die $\mathfrak{M}_r$, der das Prismatoid angehört, zur Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk}' = 0 \qquad (k = \nu + 1,\ .\ .\ .\ n)$$

wird, benutzen die eben abgeleitete Formel und kehren zu dem alten Coordinatensystem zurück, so ergiebt eine leichte Rechnung:

$$\xi_h = \frac{\sum\limits_f \varepsilon_f m_f x_{fh}}{\sum\limits_f \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das sind also die Coordinaten eines Punktes ξ, der das Prismatoid $x_0, \ldots x_\nu$ im gegebenen Verhältniss teilt und es ist diese Art der Darstellung notwendig und hinreichend für einen solchen Punkt, wie man leicht sieht.

Wir projiciren jetzt den Punkt ξ, der in der $\mathfrak{M}_n$ das Prismatoid $x_0, \ldots x_n$ nach dem Verhältniss $m_0 : \ldots : m_n$ teilt und durch das Vorzeichensystem $\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_n$ bestimmt ist, von der durch die Punkte x_k $(k = \nu+1 \ldots n)$ gebildeten $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ aus auf die durch x_f $(f = 0, 1 \ldots \nu)$ bestimmte $\mathfrak{M}_\nu$. Dadurch entstehe der Punkt η; dessen Coordinaten sollen nun ermittelt werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die $\mathfrak{M}_\nu$ sei die Coordinatenmannigfaltigkeit

$$x_{pk} = 0 \qquad (k = \nu+1, \ldots n)$$

dann ist also

$$\eta_k = x_{fk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots \nu \\ k = \nu+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

zu setzen. Die projicirende $\mathfrak{M}_{n-\nu}$, welche durch x_k $(k = \nu+1, \ldots n)$ und ξ geht, hat das Gleichungssystem:

$$x_{ph} - \xi_h = \sum_k (x_{kh} - \xi_h) t_k \qquad \begin{pmatrix} k = \nu+1, \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

und da η auf dieser Mannigfaltigkeit liegt, so giebt es ein Wertsystem τ_k, welches die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta_g - \xi_g &= \sum_r (x_{rg} - \xi_g)\tau_r \\ -\xi_k &= \sum (x_{rk} - \xi_k)\tau_r \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k,\ r = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

befriedigt. Hieraus folgt

$$\eta_g \begin{vmatrix} 1 \ldots \xi_k \ldots \\ \ldots \\ 1 \ldots x_{rk} \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_g \ldots \xi_k \ldots \\ \ldots \\ x_{rg} \ldots x_{ik} \ldots \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g = 1, 2 \ldots \nu \\ k,\ r = \nu+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

oder

$$\eta_g \begin{vmatrix} \sum_f \varepsilon_f m_f, \ . \ . \ . , & \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \\ 1, & x_{rk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fg}, \ . \ . \ . , & \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fk} \\ x_{rg}, & . \ . \ . , \ x_{rk} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ n \\ g = 1, \ 2 \ . \ . \ . \ \nu \\ k, \ r = \nu + 1 \ . \ . \ . \ n \end{pmatrix}$$

daraus nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung von

$$x_{fk} = 0 \qquad \begin{pmatrix} f = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu \\ k = \nu + 1, \ . \ . \ . \ n \end{pmatrix}:$$

$$\eta_g \sum_f \varepsilon_f m_f \mid x_{rk} \mid = \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fg} \mid x_{rk} \mid \qquad \begin{pmatrix} f = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu \\ g = 1, \ 2 \ . \ . \ . \ \nu \\ k, \ r = \nu + 1, \ . \ . \ . \ n \end{pmatrix}$$

also schliesslich:

$$\eta_g = \frac{\sum_f \varepsilon_f m_f x_{fg}}{\sum_f \varepsilon_f m_f} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu \\ g = 1, \ 2 \ . \ . \ . \ \nu \end{pmatrix}$$

d. h. aber: der Punkt η teilt das Prismatoid $x_0, \ . \ . \ . \ x_\nu$ im Verhältniss $m_0 : m_1 : . \ . \ . \ m_\nu$.

Nehmen wir das Coordinatensystem wieder ganz allgemein an, so erhält η die Coordinaten:

$$\eta_h = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g x_{gh}}{\sum_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu \\ h = 1, \ 2 \ . \ . \ . \ n \end{pmatrix}$$

An diesem Ausdruck sieht man, dass jeder Punkt ξ, welcher sich von dem, der uns als Ausgang diente, nur durch eine Verschiedenheit in den ε_k $(k > \nu)$ auszeichnet, dieselbe Projection liefert, daraus folgt aber, dass alle Punkte ξ, die in den Zeichen $\varepsilon_0, \ . \ . \ . \ \varepsilon_\nu$ übereinstimmen und deren es im Ganzen $2^{n-\nu}$ giebt, auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen, welche die Grenz-$\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$ des Prismatoides $x_0, \ . \ . \ . \ x_n$, die die Punkte x_k $(k = \nu + 1 \ . \ . \ . \ n)$ bestimmen, enthält.

Bei Aenderung der Bezeichnung, haben wir demnach folgenden Satz:

2^ν von den harmonischen Punkten, die in den Vorzeichen ε_{i_t} $(t = \nu + 1, \ . \ . \ . \ n)$ übereinstimmen, liegen auf einer $\mathfrak{M}_\nu$, die die durch die Punkte x_{i_s} $(s = 0, \ 1 \ . \ . \ . \ \nu - 1)$ dargestellte $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ enthält. Dabei bedeutet $(\ . \ . \ . \ i_h \ . \ . \ .)_{(h=0,1 \ . \ . \ . \ n)}$ irgend eine Permutation der Zahlen $0, \ 1 \ . \ . \ . \ n$.

Es sei jetzt ein Prismatoid ν-facher Ausdehnung gegeben, bestimmt durch die Punkte x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ mit den Coordinaten x_{gh} $(h = 1, 2 \ldots n)$; dasselbe sei im Verhältniss $m_0 : \ldots : m_\nu$ harmonisch geteilt, dann sind die Teilpunkte dargestellt durch die Coordinaten

$$\xi_h = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g x_{gh}}{\sum_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Alle Punkte dieser $\mathfrak{M}_\nu$ projiciren wir jetzt von einer $\mathfrak{M}_{n-\nu-1}$, gegeben durch die Punkte x_k $(k = \nu+1, \ldots n)$, aus auf $\mathfrak{M}_\nu' \ldots x_g'$ $(g = 0, 1 \ldots \nu)$, ξ' seien die Projectionen von x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ bzhw. ξ. Dann teilen die Punkte ξ' das Prismatoid x_g' $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ harmonisch. Das giebt den Satz:

Teilen Punkte ein Prismatoid harmonisch, so bleibt diese Eigenschaft durch Projection ungeändert.

Da dieser Satz nach denselben Principien bewiesen wird, wie der entsprechende des vorg. §, so übergehen wir den Beweis. Setzen wir

$$m_g \mid x_{ki} - x_{gi} \mid = m_g' \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = \nu+1, \ldots n \\ g = 0, 1 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

so ergiebt sich:

$$\xi_f' = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g' x_{gf}'}{\sum_g \varepsilon_g m_g'} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ f = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Das neue Teilungsverhältniss stimmt allerdings mit dem ursprünglichen nicht überein.

Wir betrachten nun wieder in der $\mathfrak{M}_n$ das Prismatoid x_f $(f = 0, 1 \ldots n)$, das durch die Punkte ξ harmonisch geteilt ist. Halten wir die Zeichen $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_\nu$ fest und lassen $\varepsilon_{\nu+1} \ldots \varepsilon_n$ sich verändern, so werden dadurch $2^{n-\nu}$ Punkte ξ bestimmt, welche, wie wir gesehen haben, mit den Punkten x_k $(k = \nu+1, \ldots n)$ auf einer $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ liegen. Letztere schneidet die durch die Punkte x_g $(g = 0, 1 \ldots \nu)$ gebildete $\mathfrak{M}_\nu$ in einem Punkte η, dessen Coordinaten wir als

$$\eta_h = \frac{\sum_g \varepsilon_g m_g x_{gh}}{\sum_g \varepsilon_g m_g} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1 \ldots \nu \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

gefunden haben. In der $\mathfrak{M}_{n-\nu}$ bilden die Punkte $\eta, x_{\nu+1}, \ldots x_n$ ein Prismatoid. Wir wollen beweisen, dass dieses durch die oben ausgewählten Punkte ξ harmonisch geteilt wird.

Es war

$$\xi_h \sum_f \varepsilon_f m_f = \sum_f \varepsilon_f m_f x_{fh} \qquad \begin{pmatrix} f = 0, 1 \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\xi_h \sum_{f=0}^{n} \varepsilon_f m_f = \eta_h \sum_{g=0}^{\nu} \varepsilon_g m_g + \sum_{k=\nu+1}^{n} \varepsilon_k m_k x_{kh} \qquad (h = 1, 2 \ldots u)$$

Setzen wir

$$\operatorname{sgn} \sum_{g=0}^{n} \varepsilon_g m_g = \bar{\varepsilon}$$

$$\sum_{g=0}^{\nu} \varepsilon_g m_g = \bar{\varepsilon}\,\bar{m}$$

so kommt:

$$\xi_h = \frac{\bar{\varepsilon}\,\bar{m}\,\eta_h + \sum_k \varepsilon_k m_k x_{kh}}{\bar{\varepsilon}\,\bar{m} + \sum_k \varepsilon_k m_k} \qquad \begin{pmatrix} k = \nu+1, \ldots n \\ h = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

damit ist die Behauptung erwiesen; das Teilungsverhältniss ist $\bar{m} : m_{\nu+1} : \ldots m_n$, wenn das Prismatoid in der Reihenfolge η, $x_{\nu+1}, \ldots x_n$ genannt wird.

§ 6.

Die im vorigen § entwickelten Sätze führen durch die Annahme besonderer Werte für das Teilungsverhältniss des Prismatoides zu den Verallgemeinerungen einiger bekannter Sätze der Elementargeometrie.

Z. B. liefert die Annahme

$$m_0 = m_1 = \ldots = m_n$$

einen als Schwerpunkt des Prismatoides zu bezeichnenden Punkt, die Annahme

$$m_f = J_f \qquad (f = 0, 1 \ldots n)$$

wenn J_f den Inhalt des durch die Punkte $x_{f'}$ $(f' = 0, 1 \ldots (f) \ldots n)$gebildeten Prismatoides $n-1$-facher Ausdehnung bezeichnet, die Mittelpunkte derjenigen sphärischen Mannigfaltigkeiten,

welche sämtliche $n+1$ Grenz-$\mathfrak{M}_{n-1}$ berühren. Unschwer ergeben sich ferner die Verallgemeinerungen des für das Dreieck geltenden Cevaschen Satzes von den Wechselabschnitten und des Satzes, dass die Halbirungslinie eines Winkels im Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältniss der beiden andern Seiten teilt.

Hierauf besonders einzugehen, unterlassen wir aber, um nicht den Rahmen dieser Arbeit zu sehr zu erweitern.

Ebenso wollen wir auch nur ganz kurz bemerken, dass der Satz: Eine zu einem von vier harmonischen Strahlen parallele Strecke, welche die beiden andern zugeordneten Strahlen begrenzen, wird durch den dem ersten zugeordneten Strahl halbirt, - eine ganz interessante Erweiterung zulässt. An die Stelle der Strecke und deren Halbirungspunktes tritt ein Gebilde und dessen Mittelpunkt, das als die Verallgemeinerung eines Parallelepipedons im Raume bezeichnet werden muss. Da wir die Absicht haben an einer andern Stelle hierauf genauer einzugehen, begnügen wir uns mit diesen kurzen Andeutungen.

§ 7.

Zum Schlusse der vorliegenden Arbeit soll nun noch die Frage nach der conformen Abbildung einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit auf eine andre ihre Erledigung finden. Die Ergebnisse dieses Paragraphen sind im wesentlichen Verallgemeinerungen des von Liouville in den Anmerkungen zu Monge's Applications . . . bewiesenen Satzes, dass für den dreidimensionalen Raum es nur eine conforme Abbildung giebt und dass diese, abgesehen von Verschiebungen und Drehungen, durch Transformation vermittest reciproker Radien entstanden gedacht werden kann.

Zunächst erklären wir zwei $\mathfrak{M}_n$ als ähnlich, sobald die Entfernungen je zweier entsprechenden Punkte dasselbe Verhältniss zeigen; eine $\mathfrak{M}_n$ soll dann ein conformes Abbild einer andern heissen, wenn die Umgebungen entsprechender Punkte ähnlich sind. Die Punkte der einen Mannigfalttgkeit mögen durch die Coordinaten x_h $(h = 1, 2 \ldots n)$, die der andern durch ξ_h $(h = 1, 2 \ldots n)$ dargestellt sein, $x_h + dx_h$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ bezüglich $x_h + \delta x_h$ sollen zwei benachbarte Punkte von (x_h) bezeichen, ihre entsprechenden seien $(\xi_h + d\xi_h)$ und $(\xi_h + \delta\xi_h)$ $(h = 1. 2 \ldots n)$. Dann erfordert die Definition der conformen Abbildung, dass

$$(1 \qquad \sum_h (d\xi_h - \delta\xi_h)^2 = m^2 \sum_h (dx_h - \delta x_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

für jedes beliebige dx_h und δx_h ist. Nun ist

$$d\xi_h = \sum_i \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \xi_{hi} dx_i \quad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

wobei

$$\frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} = \xi_{hi}$$

gesetzt ist; ebenso

$$\delta \xi_h = \sum_i \xi_{hi} \delta x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Mit Benutzung hiervon nimmt Gleichung 1) die Gestalt an:

$$\sum_{h,i,k} \xi_{hi} \xi_{hk} (dx_i - \delta x_i)(dx_k - \delta x_k) = m^2 \sum_h (dx_h - \delta x_h)^2$$
$$(h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Diese Gleichung kann, weil dx_h und δx_h vollständig willkürlich sind, nur bestehen, wenn

2) $$\sum_i \xi_{hi} \xi_{hk} = m^2 \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

ist. Das sind also die Bedingungsgleichungen, die die Functionen ξ_h der Grössen x_h $(h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$ zu erfüllen haben, damit die Abbildung eine conforme sei. Den Gleichungen 2) können wir noch eine andre Form geben; multipliciren wir nämlich mit ξ_{fi} und summiren, so kommt:

$$\sum_{h,i} \xi_{fi} \xi_{hi} \xi_{hk} = \sum_i m^2 \delta_{ik} \xi_{fi} = m^2 \xi_{fk} = m^2 \sum_h \delta_{fh} \xi_{hk}$$

oder

$$\sum_h \xi_{hk} \left(\sum_i \xi_{fi} \xi_{hi} - \delta_{fh} m^2 \right) = 0 \quad (f,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Da nun die Determinante $|\ \xi_{hk}\ |$ $(h,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$ nicht verschwindet, wie man durch Bilden von

$$|\ \xi_{hk}\ |^2 = |\ \xi_{hi}\ |\ |\ \xi_{hk}\ | = |\ \sum_h \xi_{hi} \xi_{hk}\ | = |\ \delta_{ik} m^2\ | = m^{2n}$$
$$(h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

sieht, so folgt

$$\sum_i \xi_{fi} \xi_{hi} - \delta_{fh} m^2 = 0$$

oder mit Buchstabenänderung:

2a) $$\sum_h \xi_{ih} \xi_{kh} = \delta_{ik} m^2 \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den Gleichungen 2).

Nun ist:

$$d\xi_h = \sum_i \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i,k} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

daraus folgt, da die $d\xi_h$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ von einander unabhängig sind,

$$\sum_i \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \delta_{hk} \quad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

oder, wenn wir

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = x_{ik} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

setzen,

$$\sum_i \xi_{hi} x_{ik} = \delta_{hk}$$

Hieraus findet man wieder:

$$\sum_{h,i} \xi_{hf} \xi_{hi} x_{ik} = \sum_k \xi_{hf} \delta_{hk}$$

oder in Verbindung mit 2)

$$\sum_i x_{ik} \delta_{if} m^2 = \sum_h \xi_{hf} \delta_{hk}$$

also schliesslich:

3) $$x_{fk} m^2 = \xi_{kf} \qquad (f, k = 1, 2 \ldots n)$$

Aus 2a) ergiebt sich durch Differentiation nach x_f:

$$\sum_h \left(\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x_f} \xi_{kh} + \frac{\partial \xi_{kh}}{\partial x_f} \xi_{ih} \right) = 0 \qquad (i \gtrless k)$$

oder mit Hilfe von 3)

$$\sum_h \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_f \partial x_h} x_{hk} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_f \partial x_h} x_{hi} \right) = 0$$

$$\sum_h \left(\frac{\partial \xi_{if}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_{kf}}{\partial x_h} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \right) = 0$$

d. h.

$$\frac{\partial \xi_{if}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_{kf}}{\partial \xi_i} = 0$$

oder

4) $$\frac{\partial \xi_{if}}{\partial \xi_k} = - \frac{\partial \xi_{kf}}{\partial \xi_i} \qquad (f, i, k = 1, 2 \ldots n; \quad i \gtrless k)$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_h} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_h} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right)$$

daraus folgt

$$\frac{\partial x_{ih}}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_{ik}}{\partial \xi_h} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

also

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\xi_{hi}}{m^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_h} \left(\frac{\xi_{ki}}{m^2} \right)$$

$$\frac{1}{m^2}\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} - \frac{2}{m^3}\xi_{hi}\frac{\partial m}{\partial \xi_k} = \frac{1}{m^2}\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h} - \frac{2}{m^3}\xi_{ki}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$$

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h} = 2\left(\xi_{hi}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_k} - \xi_{ki}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_h}\right)$$

daraus in Rücksicht auf 4)

$$5)\qquad \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \xi_{hi}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_k} - \xi_{ki}\frac{\partial \log m}{\partial \xi_h} \qquad \begin{pmatrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ h \gtrless k \end{pmatrix}$$

oder auch, wenn $\log m = M$ gesetzt und die Differentiation durch Zeiger ausgedrückt wird:

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \xi_{hi} M_k - \xi_{ki} M_h$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_h} = \sum_k \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_k} x_{kh} = \frac{1}{m^2}\sum_k \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i \partial x_k}\xi_{hk} = \frac{1}{m^2}\sum_k \xi_{hk}\frac{\partial \xi_{hk}}{\partial x_i}$$

$$= \frac{1}{2m^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \xi_{hk}^2\right) = \frac{1}{2m^2}\frac{\partial (m^2)}{\partial x_i} = \frac{\partial M}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial M}{\partial \xi_k}\xi_{ki}$$

$$(h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

also haben wir:

$$6)\qquad \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_h} = \sum_k M_k \xi_{ki} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Aus der Gleichung 5), in der wir g statt k schreiben wollen, folgt durch Differentiation nach ξ_f (f nicht $= g$)

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_f \partial \xi_g} = \xi_{hi} M_{fg} - \xi_{gi} M_{fh} + M_g \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_f} - M_h \frac{\partial \xi_{gi}}{\partial \xi_f} \quad \text{oder infolge 5)}$$

$$= \xi_{hi}(M_{fg} + M_f M_g) - \xi_{gi}(M_{fh} + M_f M_h)$$

$$\begin{pmatrix} f,\ g,\ h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f\ .\ g,\ \ h\ \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Eine Vertauschung von f und g lässt die linke Seite ungeändert, verwandelt dagegen die rechte in

$$\xi_{hi}(M_{fg} + M_f M_g) - \xi_{fi}(M_{gh} + M_h M_g)$$

demnach muss

$$\xi_{fi}(M_{gh} + M_g M_h) = \xi_{gi}(M_{fh} + M_f M_h) \qquad \begin{pmatrix} f,\ g.\ h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f,\ \ g,\ \ h\ \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

sein. Hieraus folgt:

$$\sum_i \xi_{ki}\,\xi_{fi}(M_{gh}+M_g M_h) = \sum_i \xi_{ki}\,\xi_{gi}(M_{fh}+M_f M_h)$$

oder in Rücksicht auf 2a)

$$\delta_{fk}(M_{gh}+M_g M_h) = \delta_{gk}(M_{fh}+M_f M_h) \qquad \begin{pmatrix} f,\ g,\ h,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ f,\ g,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

d. h. es ist überhaupt

7) $$M_{gh}+M_g M_h = 0 \qquad (g,\ h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n;\quad g,\ h \text{ ungleich})$$

Weiter ist

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h\,\partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_h}\{\xi_{h\,i} M_k - \xi_{k\,i} M_h\} \quad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n;\ h, k \text{ ungleich})$$

$$= \xi_{hi} M_{hk} - \xi_{ki} M_{hh} + M_k \sum_f M_f \xi_{fi} - M_h(\xi_{ki} M_h - \xi_{h\,i} M_k)$$

$$= \xi_{h\,i}(M_{hk}+2M_h M_k) - \xi_{k\,i}(M_{hh} - M_k{}^2 + M_h{}^2) + \sum_\mu \xi_{\mu i} M_\mu M_k$$

$(h,\ i,\ k,\ f = 1.\ 2\ .\ .\ .\ n;\ h, k \text{ ungleich } \mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h)\,(k)\ .\ .\ .\ n)$

Ebenso ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 \xi_{h\,i}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\sum_f M_f \xi_{f\,i}\right) = \sum_\lambda \left(M_{\lambda k}\xi_{\lambda i} + M_\lambda \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial \xi_k}\right)$$

$$+ M_{kk}\xi_{k\,i} + M_k \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_k}$$

$$= \sum_\lambda \{M_{\lambda k}\xi_{\lambda\,i} + M_\lambda M_k \xi_{\lambda i} - M_\lambda{}^2 \xi_{k\,i}\} + M_{kk}\xi_{ki} + M_k \sum_f M_f \xi_{f\,i}$$

$(f.\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n,\quad \lambda = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (k)\ .\ .\ .\ n;\ h, k \text{ ungleich})$

oder

$$\frac{\partial^2 \xi_{hi}}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \xi_{h\,i}(M_{hk}+2M_h M_k) + \xi_{k\,i}(M_{kk}+M_k{}^2 - \sum_\lambda M_\lambda{}^2)$$

$$+ \sum_\mu \xi_{\mu i}(M_{\mu k}+2M_\mu M_k)$$

$$\begin{pmatrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ \lambda = 1,\ 2\ \ldots (k)\ \ldots n;\ h, k \text{ ungleich} \\ \mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h)\,(k)\ .\ .\ .\ n \end{pmatrix}$$

Die Vergleichung der beiden Werte von $\frac{\partial^2 \xi_{h\,i}}{\partial \xi_h\,\partial \xi_k}$ liefert:

$$\xi_{ki}\,(M_{kk}+M_{hh} - \sum_\mu M_\mu{}^2) + \sum_\mu \xi_{\mu i}(M_{\mu k}+M_\mu M_k) = 0$$

In Verbindung mit 7) folgt hieraus schliesslich

8) $$M_{hh}+M_{kk} = \sum_\mu M_\mu{}^2 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ (h,k)\ .\ .\ .\ n \\ h, k = 1, 2 \ldots n;\ h, k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$M_h = \frac{\partial \log m}{\partial \xi_h} = \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$$

$$M_{hk} = \frac{\partial^2 \log m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} - \frac{1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial \xi_h}\frac{\partial m}{\partial \xi_k} \quad (h, k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, so gehen die Gleichungen 7) und 8) über in:

9) $$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h \partial \xi_k} = 0$$

10) $$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_h^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_k^2} = \sum_i \frac{1}{m}\left(\frac{\partial m}{\partial \xi_i}\right)^2 \quad \begin{pmatrix} h, i, k = 1, 2 \ldots n \\ h, k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Aus 9) folgt, dass $\frac{\partial m}{\partial \xi_h}$ unabhängig von ξ_k $(k = 1, 2 \ldots (h) \ldots n)$ d. h. es ist eine Function von ξ_h allein. Wir können also setzen

$$\frac{\partial m}{\partial \xi_h} = f_h'(\xi_h)$$

mithin:

$$m = f_h(\xi_h) + \Phi(\xi_1 \ldots \xi_{h-1}, \xi_{h+1} \ldots \xi_n)$$

Diese Ueberlegung gilt aber für jedes h, mithin muss m die Form haben

11) $$m = \sum_h f_h(\xi_h) \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Mit Hilfe hiervon folgt aus 10) dann weiter:

$$f_h''(\xi_h) + f_k''(\xi_k) = \frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i (f_i(\xi_i)} \quad \begin{pmatrix} h, i, k = 1, 2 \ldots n) \\ h, k \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

Der Ausdruck rechter Hand ist eine symmetrische Function aller ξ_h, er ist aber infolge der linken Seite unabhängig von allen ξ mit Ausschluss von ξ_h und ξ_k, mithin ist er überhaupt constant, also

$$f_h''(\xi_h) + f_k''(\xi_k) = C \qquad (h, k = 1, 2 \ldots n; \quad h, k \text{ ungleich})$$

$$f_g''(\xi_h) + f_i''(\xi_i) = C$$

daraus folgt

$$f_i'(\xi_i) + f_k''(\xi_k) = C \qquad (h, i, k \text{ ungleich})$$

Diese Gleichungen liefern

$$f_h''(\xi_h) = \frac{C}{2} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass C nicht verschwindet, und setzen

$$C = \frac{4}{\varrho}$$

dann kommt:

$$f_h''(\xi_h) = \frac{2}{\varrho} \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

woraus

$$f_h(\xi_h) = \frac{(\xi_h - \alpha_h)^2}{\varrho} + \beta_h \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

bei geeigneter Wahl der willkürlichen Constanten sich ergiebt.

Mit dieser Bestimmung wird:

$$\frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i f_i(\xi_i)} = \frac{\left(\frac{2}{\varrho}\right)^2 \sum_i (\xi_i - \alpha_i)^2}{\frac{1}{\varrho}\sum_i (\xi_i - \alpha_i)^2 + \sum_i \beta_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

damit dieser Ausdruck constant werde, ist notwendig und hinreichend, dass $\sum_i \beta_i$ verschwinde. Darnach wird also

$$m = \frac{1}{\varrho} \sum_h (\xi_h - \alpha_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\sum_h x_{hi} x_{hk} = \delta_{ik} \frac{1}{m^2} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

das aus 2a) mit Hilfe von 3) folgt, ergiebt sich in Rücksicht auf die gewonnenen Ergebnisse ohneweiteres

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{r} \sum_h (x_h - a_h)^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

Bemerken wir noch, dass in den vorstehenden Betrachtungen davon Gebrauch gemacht wurde, dass n mindestens $= 3$, so können wir das Resultat, das wir soeben erlangt haben, so aussprechen:

Abgesehen von dem noch zu erledigenden Fall $C = 0$ ist eine conforme Abbildung zweier ebenen n-fachen Mannigfaltigkeiten ($n > 2$) nur dann möglich, wenn die Function m den Bedingungen genügt

12) $\quad m = \frac{1}{\varrho} \sum_h (\xi_h - \alpha_h)^2; \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{r} \sum_h (x_h - a_h)^2 \quad (h = 1, 2 \ldots n)$

Hieraus ergiebt sich sofort:

13) $$\sum_h (x_h - a_h)^2 \cdot \sum_h (\xi_h - \alpha_h)^2 = r\varrho$$

woraus man schon erkennen kann, dass, abgesehen von Verschiebung und Drehung, die conforme Abbildung identisch ist mit der Transformation nach reciproken Radien. Um dies noch genauer einzusehen und formelmässig darzustellen, verfahren wir folgendermassen: Es seien ξ_h und $\overline{\xi_h}$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ zwei Lösungen der Differentialgleichungen 2), zu demselben m, dessen Form wir ja für alle Fälle festgestellt haben, gehörig, dann folgt aus

$$\Sigma \xi_{hf} \overline{\xi_{hg}} = \delta_{fg} m^2 \qquad (h, f, g = 1, 2 \ldots n)$$

mit Hilfe von

$$\overline{\xi_{hf}} = \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial x_f} = \sum_i \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_f} = \sum_i \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i} \xi_{if} \qquad (h, i, f = 1, 2 \ldots n)$$

das Gleichungssystem:

$$\sum_{h,i,j} \frac{\partial \xi_h}{\partial \xi_i} \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_j} \xi_{if} \xi_{jg} = \delta_{fg} m^2 \quad (f, g, h, i, j = 1, 2 \ldots n)$$

Multiplicirt man mit ξ_{kg} und summirt, so kommt:

$$\sum_{h,i,j} \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_j} \xi_{if} \sum_g \xi_{jg} \xi_{kg} = \sum_g \delta_{fg} m^2 \xi_{kg}$$

oder in Rücksicht auf 2a):

$$\sum_i \xi_{if} \left(\sum_h \frac{\partial \xi_h}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_h}{\partial \xi_k} - \delta_{ik} \right) = 0 \qquad (f, h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

also, da

$$| \xi_{if} | \text{ nicht} = 0 \qquad (i, f = 1, 2 \ldots n)$$

14) $$\sum_h \frac{\partial \xi_h}{\partial \xi_i} \frac{\partial \overline{\xi_h}}{\partial \xi_k} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Dieses Differentialgleichungssystem stimmt überein mit dem System 2), wenn in diesem

$$m = 1, \quad \xi_h = \xi_h, \quad x_h = \xi_h$$

gesetzt werden; mit der Auflösung der Gleichungen

15) $$\Sigma \xi_{hi} \xi_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2 \ldots n)$$

haben wir also zugleich die des Systems 14). Die Gleichungen 5) und 6) werden für den speciellen Fall $m = 1$ zu

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = 0 \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Nun ist

$$\frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k} = \sum_f \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_f} \frac{\partial x_f}{\partial \xi_k} = \frac{1}{m^2} \sum_f \xi_{kf} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i}$$

also kommt:

$$\sum_f \xi_{kf} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i} = 0 \qquad (f,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

daraus

$$\sum_{k,f} \xi_{kg} \xi_{kf} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i} = \sum_f \delta_{fg} \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_f \partial x_i} = \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_g \partial x_i} = 0$$

$$(f,\ g,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

d. h. aber, es ist

16) $$\xi_h = c_h + \sum_i \alpha_{hi} x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

und da

$$\xi_{hi} = \alpha_{hi}$$

ist, so müssen die Constanten α_{hi} den Bedingungen

$$\sum_h \alpha_{hi} \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

genügen. Demnach folgt aus dem Gleichungssystem 14):

$$\bar{\xi}_h = c_h + \sum_k \alpha_{hk} \xi_k$$

mit der Massgabe:

$$\sum \alpha_{hi} \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Jede zu demselben m gehörige Lösung der Differentialgleichungen 2) lässt sich mithin aus einer einzigen auf diese Weise herleiten. Um nun eine solche aufzustellen, beweisen wir zunächst, dass die Constanten r und ϱ einander gleich sind; das geschieht so:

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{m}\right)}{\partial x_h^2} = \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_i \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{m}\right)}{\partial \xi_i} \xi_{ih} \right) = \frac{\partial}{\partial x_h} \left(- \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} x_{hi} \right)$$

$$(i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

$$= - \sum_k \xi_{kh} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} x_{hi} \qquad (i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

$$= - m^2 \sum_{i,k} x_{hk} \left(\frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i\ \partial \xi_k} x_{hi} + \frac{\partial m}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_{hi}}{\partial \xi_k} \right)$$

$$= -m^2 \sum_{i,k} x_{hi}\, x_{kr} \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \frac{m^2}{2} \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sum_k x_{hk}^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{m^2} \sum_{i,k} \xi_{ih}\, \xi_{kk} \frac{\partial^2 m}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \frac{m^2}{2} \sum_i \frac{\partial m}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{m^2} \right)$$

Mit Benutzung von 2) und 12) folgt hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{\varrho}$$

d. h.

17) $$r = \varrho$$

Setzt man nun

$$\xi_h = \frac{r(x_h - a_h)}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

so werden — man überzeugt sich davon leicht — die Gleichungen 2) befriedigt für den allgemeinsten Wert, den m haben kann,

$$m = \frac{r}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Daraus folgt in Verbindung mit 15), dass die allgemeinste Lösung dieses Gleichungssystems überhaupt enthalten ist in der Form

18) $$\xi_h = c_h + r \sum_i \alpha_{hi} \frac{x_i - a_i}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

mit der Massgabe:

$$\sum_h \alpha_{hi}\, \alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Nun ist noch der Fall zu erledigen, dass die Constante C verschwindet; hierfür wird:

$$f_h''(\xi_h) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\sum_i f_i'(\xi_i)^2}{\sum_i f_i(\xi_i)} = 0$$

$$(h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

d. h.

$$f_h''(\xi_h) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_h'(\xi_h) = 0 \quad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

mithin kommt

$$f_h(\xi_h) = \text{const}$$

also ist m selbst constant. Für diesen Fall können die Differentialgleichungen 2) in der Form geschrieben werden:

$$\sum_h \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\xi_h}{m}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\xi_h}{m}\right) = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Dieses Gleichungssystem stimmt überein mit dem System 15), mithin folgt hieraus:

$$\frac{\xi_h}{m} = c_h' + \sum_i \alpha_{hi}\, x_i$$

oder auch

$$\xi_h = c_h + m \sum_i \alpha_{hi}\, x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

die α_{hi} müssen dabei den Bedingungen genügen:

$$\sum_h \alpha_{hi}\,\alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Die hierdurch bestimmte Abbildung drückt die Aehnlichkeit und für den Fall $m = 1$ die Congruenz der beiden Mannigfaltigkeiten aus.

Demnach haben wir das Endergebniss:

„Eine ebene n-fache Mannigfaltigkeit ($n > 2$) lässt sich auf „eine andre ebene n-fache Mannigfaltigkeit nur auf zwei Arten con„form abbilden, entweder so, dass beide ähnlich sind — diese Ab„bildung wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$\xi_h = c_h + m \sum_i \alpha_{hi}\, x_i \qquad (h,\ i = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

„oder so, dass die eine n-fache Mannigfaltigkeit sich aus der andern „mit Hilfe der Transformation durch reciproke Radien und eine „Coordinatentransformation herleiten lässt — diese Abbildung wird „durch die Gleichungen

$$\xi_h = c_h + r \sum_i \alpha_{hi}\, \frac{x_h - a_h}{\sum_k (x_k - a_k)^2} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

„vermittelt; in beiden Fällen genügen die α_{hi} den Bedingungen

$$\sum_h \alpha_{hi}\,\alpha_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n)$$

Zum Schluss dieser Betrachtungen wollen wir noch auf einen merkwürdigen Unterschied zwischen der conformen Abbildung zweier n-fachen ebenen Mannigfaltigkeiten ($n > 2$) und der zweier Ebenen aufmerksam machen und eine Gleichung herleiten, die diesen Unterschied recht erkennen lässt. Es ist

$$\sum_i \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_i^2} = \sum_i \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial x_i} = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial \xi_{hi}}{\partial \xi_k}\,\xi_{ki} + \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial \xi_h}\,\xi_{hi} \right)$$

$$\begin{pmatrix} h,\ i,\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ n \\ k,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \left(\sum_k \xi_{ki} \left(\xi_{hi} M_k - \xi_{ki} M_k \right) + \xi_{hi} \sum_f M_f \xi_{fi} \right)$$

$$\begin{pmatrix} f,\ h,\ i.\ k = 1,\ 2\ .\ .\ .\ a \\ k,\ h \text{ ungleich} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_k \left(M_k \sum_i \xi_{hi}\,\xi_{hi} - M_h \sum_i \xi_{ki}^2 \right) + \sum_f M_f \sum_i \xi_{fi}\,\xi_{hi}$$

$$= \sum_k \left(M_k \delta_{hk} m^2 - M_h m^2 \right) + \sum_f M_f \delta_{fh} m^2$$

$$= -(n-1) M_h m^2 + M_h m^2 = -(n-2) M_h m^2$$

Für $n = 2$ folgt hieraus die bekannte Beziehung

$$\Delta \xi_h = \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (h = 1,\ 2)$$

die also nur für diesen speciellen Fall gilt.

Vita.

Natus sum Hermannus Kühne Berolini die XXV mensis Nov. anni h. s. LXVII patre Ernesto matre Aemilia e gente Röper, quos parentes adhuc superstites esse valde gaudeo. Fidei addictus sum evangelicae.

Primis litterarum elementis imbutus gymnasium reale, quod Berolini ill. Ottone Vogel directore eximie floret, per septem annos frequentavi. Testimonium maturitatis autumno a. h. s. LXXXVI adeptus inter cives universitatis Fridericae-Guilelmae receptus sum atque per decem semestria studiis mathematicis incubui. Scholis interfui virorum doctissimorum Arons, Ebbinghaus, Fuchs, Glan, Günther †, de Helmholtz, Hettner, Knoblauch, E. Kötter, F. Kötter, Kronecker†, Netto, Paulsen, Schulze, Weinstein, Zeller. Seminarii mathematici per septem semestria sodalis fui.

Omnibus his viris optime de me meritis, imprimis professoribus ill. ill. Fuchs et Kronecker, quem quidem nuper acerba morte nobis ereptum dolemus, nec non viris illis carissimis Vogel et F. Kötter, qui praecique ad studium rerum mathematicarum me incitaverunt, summas gratias ago semperque agam. Praeterea professoris ill. Schweigger, qui ut morbo oculorum, quo iam tertium annum crucior, mederetur summam operam dedit, memoria semper mihi colenda erit.

Thesen.

I.

Die Untersuchungen in der Lehre von der n-fachen Mannigfaltigkeit haben nicht lediglich formalen Wert.

II.

Die Worte Kroneckers: „Jede Definition der Irreduktibilität ganzer Funktionen entbehrt so lange einer sicheren Grundlage, als nicht eine Methode angegeben ist, mittels deren bei einer bestimmten vorgelegten Funktion entschieden werden kann, ob dieselbe der aufgestellten Definition gemäss irreduktibel ist oder nicht," (Grundz. S. 11) gelten auch für lineare homogene Differentialgleichungen.

III.

Bei der grossen Bedeutung, welche in neuerer Zeit das Castiglianosche Prinzip von dem Minimum der Deformationsarbeit in der technischen Mechanik gewonnen hat, ist es durchaus wünschenswert, dass auch in der Theorie mehr Rücksicht darauf genommen werde.